3/10/2017. Ι. Κεχαγιάς Γραφείο 409 α

Μαθηματικές Προτάσεις - Θεωρήματα.

- 1) Γράφουμε πολύ προσεκτικά την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.
- 2) Η απόδειξη στηρίζεται σε λογικές προτάσεις οι οποίες δεν δημιουργούν ασάφειες ή ερωτηματικά. Αν χρειαστεί να ορίσουμε μεταβλητές, τις ορίζουμε από την αρχή, καθώς και τα σύνολα από τα οποία λαμβάνουν τιμές. Αν κάποια μεταβλητή έχει κάποια επιπλέον ιδιότητα, αυτή την δηλώνουμε.
- 3) Παραδείγματα. Για να αντιληφθούμε τις έννοιες και όχι για απόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντιπαραδείγματα για να δηλώσουμε ότι μια πρόταση δεν ισχύει.
- 4) Δεν χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα για να δηλώνουμε διαφορετικές έννοιες.
- 5) Δεν πηδάμε "βήματα" στην απόδειξη.
- 6) Μας βοηθάει να τροποποιούμε κατάλληλα την πρόταση μας ώστε να μας "βοηθάει" στην (~~απόδειξη~~) απόδειξη.

Παράδειγμα: Τα τετράγωνα των άρτιων φυσικών διαιρούνται με το 4 $\Leftrightarrow \left\{ (2\kappa)^2 = 4\kappa^2 \right.$.
Το τετράγωνο του 2κ διαιρείται με το 4

- 7) Προσοχή με τις συνεπαγωγές

Παράδειγμα: Αν το a διαιρείται με το 6, τότε διαιρείται και με το 3.
$a = 6b = 2 \cdot 3 \cdot b = 3j$
3 διαιρεί 3 $\not\Rightarrow$ 6 διαιρεί το 3.

- Ο Κεχαγιάς φεύγει με μεγάλη βαλίτσα, ο Κεχαγιάς έχει πολλά ρούχα. (ισχύει μόνο το αντίστροφο).
- Ο αστυφύλακας είναι όργανο, το μπουζούκι είναι όργανο, άρα ο αστυφύλακας είναι μπουζούκι.

Γραμμικές Εξισώσεις → ο συνολικός βαθμός του κάθε μονωνύμου είναι 1.

Πχ. $3x=7$ → μοναδική λύση

$3x+y=7$ → άπειρες

~~$xy=6$~~ ~~$x^2+2x=7$~~

~~$e^{x}=1$~~ $y^{5x}=x^5+1$

συμβολισμός: Με x, y, z ή $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ θα συμβολίζουμε μεταβλητές.

Με a, b, γ ή $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ θα συμβολίζουμε σταθερές.

Γραμμική εξίσωση με n μεταβλητές: $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$.

Η λύση της είναι μία n-άδα αριθμών $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ η οποία την επαληθεύει, Δηλαδή $a_1s_1+a_2s_2+\dots+a_ns_n=b$ αληθής.

Στις n-άδες έχει σημασία η σειρά.

Η λύση (n-άδα) θα ανήκει σε κάποιο σύνολο το οποίο έχει οριστεί από την αρχή

~~ΕΡΩΤΗΣ~~

ΕΡΩΤΗΜΑ: 1) Έχει λύση;

2) Αν έχει λύση, είναι μοναδική.

Παράδειγμα: · $0x=3$ ΟΧΙ

$3x=7$ μοναδική λύση

$3x+y=7$ άπειρες στους πραγματικούς, αλλά και στους ακέραιους.

Σύστημα = σύνολο γραμμικών εξισώσεων.

Παράδειγμα: • $x+y=2$

• $x+y=2$ (β)
$x+3y=7$

• $x+y=2$ (γ)
$x+3y+z=7$.

• $x+y=2$ (α)
$2x+2y=3$

• $3x=7$
$2x=\frac{14}{3}$
$x=\frac{1}{2}$

Αν ένα σύστημα έχει λύση, θα καλείται συμβιβαστό.

ΕΡΩΤΗΜΑ: 1) Αν ένα σύστημα έχει λύση, είναι μοναδική και από τι εξαρτάται;

«Απάντηση»: Ένα γραμμικό σύστημα, είτε δεν έχει λύση (α), είτε είναι μοναδική (β), είτε έχει άπειρες.

Πώς θα τη βρίσκω; Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Προσοχή! Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι.

~~πχ.~~
~~Γραμμοπράξεις~~
~~Να λυθεί το~~ $\cancel{3x+6y-5z=0}$
$\cancel{2x+4y-3z=1}$
$\cancel{x+y+2z=9}$

$\cancel{x+y+2z=9}$

Προσοχή! Υπάρχουν και άλλοι μέθοδοι!

Πχ. Γραμμοπράξεις.

Να λυθεί το:

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 \; 3x+6y-5z=0 & \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3 \\ \gamma_2 \; 2x+4y-3z=1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 \; x+y+2z=9 & \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 & \gamma_1 \\ 2x+4y-3z=1 & \gamma_2 \\ 3x+6y-5z=0 & \gamma_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z=9 & \gamma_1 \\ 2y-7z=-17 & \gamma_2 \to \gamma_2-\gamma_1 \\ 3y-11z=-27 & \gamma_3 \to \gamma_3-\gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} & \gamma_2 \\ 3y-11z=-27 & \gamma_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z=9 & \gamma_1 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} & \gamma_2 \\ -\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} & \gamma_3 \to \gamma_3-\gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 & \gamma_1 \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} & \gamma_2 \\ z=3 & 2\gamma_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+6=9 \\ y-\frac{7}{2}3=-\frac{17}{2} \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2=3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3. \end{cases}$$

Επαλήθευση: $3+12-15=0$

$2+8-9=1$

$1+2+6=9$

(Σπίτι: να λυθούν τα γραμμικά συστήματα:

1) $3x+2y+z=2$
$y+z=1$
$x+y+2z=3$

2) $3x+2y+z=2$
$y+z=1$.)

$x+x+x+1=74$
$3x=73$

Παράδειγμα: Το άθροισμα των ηλικιών τριών φίλων είναι 74 έτη. Δύο έχουν την ίδια ηλικία. Ο ένας είναι κατά ένα έτος μεγαλύτερος. Ποια είναι η ηλικία τους

1ος φίλος → x ηλικία
2ος φίλος → y ηλικία , $x,y,z \in \mathbb{N}$ (φυσικοί), αλλά στη ζωή $0 \le x,y,z \le 150$
3ος φίλος → z ηλικία.

$$\begin{cases} x+y+z=74 \\ x=y \Leftrightarrow x-y=0 \\ x=z-1 \Leftrightarrow x-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=74 & \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3 \\ x-y=0 & \gamma_2 \leftrightarrow \gamma_1 \\ x+0y-z=-1. & \gamma_3 \to \gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+0z=0 \\ x+0y-z=-1 & \gamma_2 \to \gamma_2-\gamma_1 \\ x+y+z=74 & \gamma_3 \to \gamma_3-\gamma_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=-1. \\ 2y+z=74. & \gamma_3 \to \gamma_3-2\gamma_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=-1 \\ 3z=76. & \gamma_3 \to \frac{1}{3}\gamma_3 \end{cases}$$

$x = 1+\frac{76}{3}$
$y = -1+\frac{76}{3} = \frac{73}{3}$
$z = \frac{76}{3}$

$x=\frac{73}{3}$
$y=\frac{73}{3}$
$z=\frac{76}{3}$

Το αρχικό σύστημα δεν έχει λύση στο $\mathbb{N}$

Αλλά θα είχε λύση, αν οι μεταβλητές-άγνωστοι λαμβάνουν τιμές από το $\mathbb{Q}$ τους ρητούς

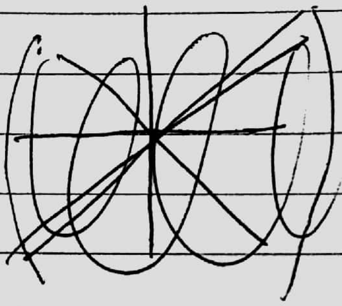
→ βιβλίο του Αδαμιάν.

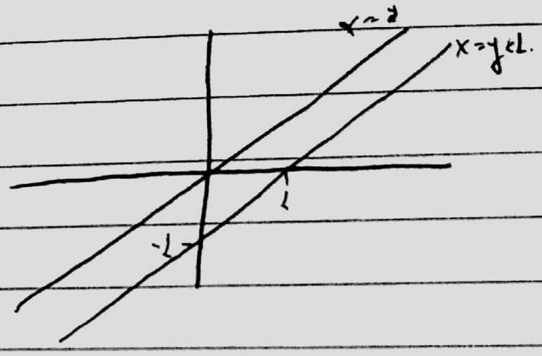
6/10/2017 $x-y=0$

Έχει "άπειρες" λύσεις αν το σύνολο των λύσεων είναι άπειρο και δίνονται $x=y$.

$x-y=1 \Rightarrow x=y+1$

Γενικότερα





$x-y=c$, όπου c αριθμός

Αυτές είναι όλες //. Ο συντελεστής διεύθυνσης της $ax+by=c$ ας είναι $\frac{b}{a}$ με $a\neq0$.

Εφαρμογή να μελετήσουμε το σύστημα: $a_1x+b_1y=c_1$
$a_2x+b_2y=c_2$

Έχει λύσεις → ΟΧΙ, όταν είναι παράλληλες $\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ (ή $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$) με $a_1a_2b_1b_2\neq0$.

→ ΝΑΙ → ΠΟΣΕΣ → ΜΙΑ κοινό σημείο
→ ΑΠΕΙΡΕΣ. όταν η μία είναι πάνω στην άλλη.

Όταν δεν είναι παράλληλες

Η μία πάνω στην άλλη: $a_1x+b_1y=c$
$ka_1x+kb_1y=kc_1$ με $c\neq0$.

Παράδειγμα: Να μελετηθεί το: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ | Gauss $\begin{cases} x = 1 \\ y+z=0. \end{cases}$

$x=1$ και $y=-z$ $z\in\mathbb{R}$ ό,τι θέλει

1 βαθμός ελευθερίας = ευθεία. ~~1 βαθμός ελευθερίας = ευθεία.~~

$ax+by+\gamma z=c$

$x+\frac{b}{a}y+\frac{\gamma}{a}z=\frac{c}{a}$

$x=-\frac{b}{a}y-\frac{\gamma}{a}z+\frac{c}{a}$ y,z λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή. επίπεδο.

$z=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{\gamma}{a}z+\frac{c}{a}.$

Μία εξίσωση της μορφής $ax+by+\gamma z=c$ δημιουργεί επίπεδο στο χώρο.

Και το $x+y+z=1$
$0x+y+z=0$ ορίζει επίπεδο.

$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\}$ Σύνολο λύσεων $\{(x=1, -z, z) \mid z\in\mathbb{R}\}$

αποτελεί ευθεία.

Scanned with CamScanner

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους x_1, x_2, x_3, x_n καλείται ένα $m \times n$ σύστημα:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}\cdot x_2 + \quad + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

άγνωστοι

πίνακας συστήματος

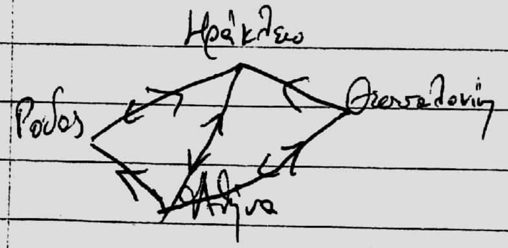
$$\begin{array}{c|cccc} & 1^{η} & 2^{η} & n \text{ στήλη} & (n+1) \text{ στήλη σταθερών όρων} \\ \hline 1^{η} \rightarrow & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} & b_1 \\ 2^{η} \rightarrow & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} & b_2 \\ & & & & \\ & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,n} & b_m \end{array}$$

εξισώσεις

Ο "πίνακας" που δημιουργείται από ένα $m \times n$ σύστημα έχει m γραμμές και $(n+1)$ στήλες.

Γιατί να χρησιμοποιήσουμε πίνακες; Διότι κάνουν τη ζωή πιο εύκολη

Χρήση των πινάκων: Ο επόμενος γράφος δίνει τις συνδέσεις μιας μικρής αεροπορικής εταιρείας.



ΑΦΙΞΕΙΣ

ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ

$$\begin{array}{c} \\ A \\ Θ \\ Η \\ Ρ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & Θ & H & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ

m επιλογές

n επιλογές.

Ορίζουμε το σύνολο $I_{m,n} = \{(i,j) \mid 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n\}$ με m n στοιχεία.

$I_{2,3} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.

σε κάποιο σύνολο

Ένας $m \times n$ πίνακας είναι μια απεικόνιση $A : I_{m,n} \to \mathbb{R}$

Δηλαδή η τιμή της A στο στοιχείο (i,j) είναι ένας αριθμός $A(i,j) =$ αριθμός $\in \mathbb{R}$.

Γενικά, συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα A, B πίνακες. $\left(A = (a_{i,j})_{m,n}\right)$

Συνήθως το $A(i,j)$ το συμβολίζουμε $a_{i,j}$ και γράφουμε $A = (a_{i,j})$

$a_{i,j}$ είναι το στοιχείο στον πίνακα που βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη.

Συμβολισμός $2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 6 + \ldots + 2\cdot 101 = \sum_{i=2}^{101} 2i = \sum_{x=2}^{101} 2x$

$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \cdot \; \cdot 101 = \prod^{101} i$

$\sum_{i=2}^{5} 2i+1 = (2\cdot 2^2+1) + (2\cdot 3^2+1) + (2\cdot 4^2+1) + (2\cdot 5^2+1) = \ldots$

Π.χ. Έστω ο πίνακας $A=\left(\sum_{k=i}^{i+j} k^2\right)$

$(i,j)\in I_{3,2} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$.

$a_{1,1}=A(1,1)=\sum_{k=1}^{1+1}k^2=\sum_{k=1}^{2}k^2=1^2+2^2=5$, $a_{1,2}=\sum_{k=1}^{1+2}k^2=1^2+2^2+3^2=14$

$a_{2,1}=\sum_{k=2}^{2+1}k^2=2^2+3^2=13$ $\quad a_{2,2}=\sum_{k=2}^{2+2}k^2=2^2+3^2+4^2=29$.

$a_{3,1}=\sum_{k=3}^{3+1}k^2=3^2+4^2=25$ $\quad a_{3,2}=\sum_{k=3}^{3+2}k^2=3^2+4^2+5^2=50$

Επίσης λέμε ότι $m\times n$ πίνακας είναι μια ορθογώνια (~~[illegible]~~) διευθέτηση mn αντικειμένων σε m γραμμές και n στήλες.

Ειδικές μορφές πινάκων

Τετραγωνικοί $m=n$

Διαγώνιος, όταν τα στοιχεία τα οποία δεν βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μηδέν. Διαγώνια στοιχεία $a_{i,i}$

Π.χ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$

$\Gamma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ΟΧΙ $\quad \Delta=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ΝΑΙ

$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ΟΧΙ

Scanned with CamScanner

Άνω τριγωνικός: Τετραγωνικός με $a_{i,j}=0$, για $i>j$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι   είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ είναι

Κάτω τριγωνικός όταν $a_{i,j}=0$ για $i<j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μηδενικός καλείται ένας πίνακας, όταν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν $O_{m,n}$.
Ταυτοτικός ή μοναδιαίος καλείται ένας πίνακας όταν $m=n$ $a_{i,i}=1$ και $a_{i,j}=0$ για $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πχ. "Λόγια"

Πρόσθεση πινάκων: Ορίζεται το άθροισμα των $m \times n$ πινάκων $A=(a_{i,j})_{m,n}$ και $B=(b_{i,j})_{m,n}$ να είναι ο πίνακας $C=(c_{i,j})_{m,n}$ με

$c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ για όλα τα $1 \leq j \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Γράφουμε $C=A+B$

Πχ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 5 & -17 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 5 & -22 & 15 \end{pmatrix}$.

Σημειακό γινόμενο πινάκων ορίζεται το γινόμενο ενός $m \times n$ πίνακα $A=(a_{i,j})_{m,n}$ με έναν αριθμό c, να είναι ο πίνακας $C=(c_{i,j})_{m,n}$ όπου

$c_{i,j}=c\,a_{i,j}$ για όλα τα i και j. Γράφουμε $C=cA$.

— διαγώνιος / αντιδιαγώνιος (αν αρίζουν)

10/10/2017

πχ. συμβολισμός: $A=(a_{i,j})_{m,n}$, $B=(b_{i,j})_{m,n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο $m\times n$ πίνακες $A=(a_{i,j})_{m,n}$ και $B=(b_{i,j})_{m,n}$ είναι ίσοι, αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. $a_{i,j}=b_{i,j}$, για όλα τα i και j με $1\le i\le m$. $1\le j\le n$

Πχ. $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,n} \end{bmatrix}$ 1η γραμμή $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$

iη γραμμή $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$.

2η στήλη $\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \\ a_{m,2} \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = a_{i,1}+a_{i,2}+\dots+a_{i,n}.$$

σταθερό => i-γραμμή

$$\sum_{l=1}^{n} a_{l,j} = a_{1,j}+a_{2,j}+\dots+a_{m,j}$$

σταθερό => j-στήλη

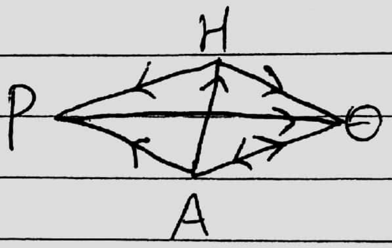
Ορίζουμε άθροισμα $m\times n$ πινάκων. Αν $A=(a_{i,j})_{m,n}$ και $B=(b_{i,j})_{m,n}$, τότε $A+B=C$ με $C=(c_{i,j})_{m,n}$, όπου $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ (για όλα τα i,j)

Ορίζουμε γινόμενο αριθμού με πίνακα

Αν $A=(a_{i,j})_{m,n}$ και $c\in\mathbb{R}$, τότε $cA=C$, όπου $C=(c_{i,j})_{m,n}$ με $c_{i,j}=c\,a_{i,j}$ για όλα

ΕΡΩΤΗΜΑ: Υπάρχει γινόμενο πινάκων; ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ

Πχ. Οι συνδέσεις μιας αεροπορικής εταιρείας.



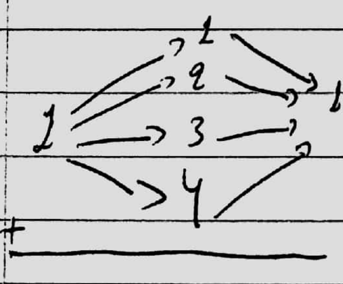
$$M=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{αν από το } i \text{ αεροδρόμιο πηγαίνει στο } j\\ 0 & \text{αν δεν πηγαίνει}\end{cases}$$

$m_{ii}=0$.

Θέλουμε το $M\cdot M=M^2$

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{1,2}&c_{13}&c_{14}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}\\c_{31}&c_{3,2}&c_{33}&c_{34}\\c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}\end{bmatrix}$$

c_{11} πλήθος συνδέσεων με ένα σταθμό από την 1 στην 1.



Για να βρω το c_{11} πολλαπλασιάζω τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης γραμμής του πρώτου με τα αντίστοιχα της 1ης στήλης του δεύτερου και τα αθροίζω.

$$+a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{14}a_{41}=c_{11}=\sum_{k=1}^{4}a_{1,k}a_{k,1}$$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$

Άρα μόνο μία $1\rightarrow$ μία άλλη $\rightarrow 1$

Ορισμός: Το γινόμενο των πινάκων $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ και $B=(b_{i,j})_{n\times \ell}$ ορίζεται ως $C=AB$ με $C=(c_{i,j})_{m\times \ell}$ και $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$. Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία της i-γραμμής του πρώτου με τα αντίστοιχα της j-στήλης του δεύτερου και αθροίζουμε

Πχ. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 1=9 \\ 5\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1=6 \end{matrix}$$

$B\cdot A$ δεν ορίζεται

$$c_{1,1}=\sum_{k=1}^{3} a_{1,k}\cdot b_{k,1}$$

πχ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 = 5+14=19 \\ 3\cdot 6+4\cdot 8 = 18+32=50 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 19 \\ 50 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 = 5+18=23 \\ 7\cdot 2+8\cdot 4=14+32=46 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 23 \\ 46 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11}=1\cdot 5+2\cdot 7=19$
$c_{12}=1\cdot 6+2\cdot 8=$
$c_{21}=3\cdot 5+4\cdot 7=$
$c_{22}=3\cdot 6+4\cdot 8=$

Οι πίνακες είναι διαφορετικοί

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$d_{11}=5\cdot 1+6\cdot 3=23$
$d_{12}=5\cdot 2+6\cdot 4=$
$d_{21}=7\cdot 1+8\cdot 3=$
$d_{22}=7\cdot 2+8\cdot 4=$

$\longrightarrow$

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1\cdot(-2) + 2(1) =$

$c_{12} = 1\cdot 6 + 2(-3)$

$c_{21} = (-4)(-2) + (-4)\cdot 1$

$c_{22} = (-4)\cdot 6 + (-8)(-3) = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = O$ μηδενικός $\not\Rightarrow$ $A =$ μηδενικός ή $B =$ μηδενικός.

$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ -8 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

Ασκήσεις: Να υπολογισθούν:

$(1, 1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Τι παρατηρείς;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Να βρεθεί 2×2 πίνακας A ώστε:

$A^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Να βρεθεί πίνακας B ώστε:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with CamScanner

→

Ιδιότητες. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας.

1) $I_{n\times n} A = A$

2) $A + O_{n\times n} = A$.

3) $A + (-1)A = O_{n\times n}$.

Ο $(-1)A$ καλείται ο αντίθετος του A.

Απόδειξη 2: $A = (a_{i,j})$, $O_{n\times n} = (0)$

$$\left.\begin{array}{l} A + O_{n\times n} = C = (c_{i,j}) \\ c_{i,j} = a_{i,j} + 0 = a_{i,j} \quad \forall i \text{ και } j \end{array}\right\} \Rightarrow C = A.$$

Απόδειξη 3: $(-1)A = C$ με $c_{i,j} = (-1)a_{i,j} = -a_{i,j}$

$A + C = B$ με $B = (b_{i,j})$ και $b_{i,j} = a_{i,j} + c_{i,j} = a_{i,j} + (-a_{i,j}) = 0$

Άρα $b_{i,j} = 0 \Rightarrow B = O_{n\times n}$.

20/10/2017 Άσκ: 1

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$B\Gamma=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\\2&2\\2&2\end{pmatrix}.$$

2) $A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=A.$

$x^2=x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0$ ή $x=1$.

3) νδο $B^3=0$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ac&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x^3=0\Rightarrow x=0.$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A \cdot B = B \cdot A$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} x+t & y+z \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ t & t+z \end{pmatrix}$

$x + t = x \Rightarrow t = 0$

$y + z = x + y \Rightarrow x = z$.

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ;$, Έστω $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2\gamma & b+2\delta \\ -2a+\gamma & -2b+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & 2a+b \\ \gamma-2\delta & 2\gamma+\delta \end{pmatrix}$

Άρα: $a + 2\gamma = a - 2b \Rightarrow \gamma = -b$

$b + 2\delta = 2a + b \Rightarrow \delta = a$

$-2a + \gamma = \gamma - 2\delta$

$-2b + \delta = 2\gamma + \delta$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a - 2b = 1$

$2a + b = 0$

$5b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$

$a + 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$.

$B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

I) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$A^4 = A^2 A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2013} = A^{2012} A$$

$$(A^4)^{503} A = IA = A.$$

→

$(AB)^t = B^t A^t$

$A = (a_{i,j})$

$B = (b_{i,j})$

$AB = C = (C_{i,j})$

$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

$(AB)^t = C^t = C' = (C'_{i,j})$ με $C'_{i,j} = C_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{ki}$

$B^t = (b'_{i,j})$ με $b'_{i,j} = b_{j,i}$

$A^t = (a'_{i,j})$ με $a'_{i,j} = a_{j,i}$

$B^t A^t = D = (d_{i,j})$ με $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$

Άρα $d_{i,j} = c'_{i,j} \Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$.

9) $A^4 - A^3 + A^2 - A + I = 0 \Rightarrow I = -A^4 + A^3 - A^2 + A \Rightarrow I = A(-A^3 + A^2 - A + I) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I \\ &-A^4 = -A^3 + A^2 - A + I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{-1} = A^4$$

10) $\exists A^{-1}, B^{-1}, (A+B)^{-1}$

$\exists (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$

$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B \Rightarrow (A^{-1} + B^{-1})\underbrace{A(A+B)^{-1}B}_{D} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^{-1} + B^{-1})D = A^{-1}D + B^{-1}D = A^{-1}A(A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B =$

$= (A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B = (I + B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = B^{-1}B + B^{-1}A(A+B^{-1})B =$

$= B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$

Στοιχειώδεις Πίνακες - Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Γραμμών

$M_i(a)$ Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής με a

$A_{i,j}(a)$ Προσθέτει a φορές την j στην i

$E_{i,j}$ εναλλάσσει i και j.

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ο πίνακας γίνεται κλιμακωτός ή ανηγμένος κλιμακωτός.

Πχ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 7 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ανηγμένος

rank $= 3$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το πλήθος των ηγετικών μονάδων στον κλιμακωτό ή ανηγμένο κλιμακωτό ενός πίνακα A θα καλείται βαθμίδα ή rank του A.

rank $A =$

Για να βρούμε το rank του πίνακα A βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό.

Θεώρημα: Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό.

Δηλαδή, μετά από γραμμοπράξεις θα πάρουμε έναν ανηγμένο κλιμακωτό
Δηλαδή υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες
$E_{i,j}$, E_k ώστε ο πίνακας $E_k E_{k-1} \dots E_1 A$ να είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Έστω το γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $Ax=b$ και (A,b) ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.
Αν $(s_1,\dots,s_n)$ ικανοποιεί το σύστημα $A\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots \\ s_n\end{pmatrix}=b$, τότε καλείται λύση του συστήματος.

Δύο συστήματα καλούνται ισοδύναμα αν κάθε λύση του ενός είναι και του άλλου.
Ένα σύστημα καλείται ομογενές, αν $b_1=b_2=\dots=b_m=0$.

Το ομογενές έχει πάντα το $(0,\dots,0)$ σαν λύση. Αν το σύστημα $Ax=b$ έχει τουλάχιστον μία λύση θα καλείται συμβιβαστό.

Πχ. $\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{matrix}$ όχι συμβιβαστό

Θεώρημα: Αν (A',b') είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον (A,b) με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, τότε τα αντίστοιχα συστήματα $Ax=b$ και $A'x=b'$ είναι ισοδύναμα. Δηλαδή, έχουν τις ίδιες λύσεις.

Πόρισμα: Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός του (A,b) είναι ο (R,s), τότε τα συστήματα $Ax=b$ και $Rx=s$ είναι ισοδύναμα.

$$(A,b) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = b \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$0x_1+0x_2+x_3+0x_4+ax_5=0$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+x_4+bx_5=0$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5=1 \longrightarrow 0=1.$$

Παρατήρηση: Ένα σύστημα είναι συμβιβαστό αν ο αναγμένος κλιμακωτός του επαυξημένου πίνακα δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

Παρατήρηση: Αν $m<n$, τότε ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση.

Επειδή rank του επαυξημένου είναι το πολύ $m<n$. Άρα οι $n-m$ άγνωστοι δεν καθορίζονται. Δηλαδή λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή. Τότε, το σύστημα έχει περισσότερες από μία λύσεις.

$$(A,b) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} (R,s) \text{ αναγμένος}$$

Πχ. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \quad 1 \qquad \left(A, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad 1 \end{aligned}$$

$(A,0)=A$ επαυξημένος του ομογενούς

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \to r_3 - r_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to r_1 + r_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r_3 \to \frac{2}{7} r_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \frac{1}{2} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to r_1 - \frac{3}{2} r_3 \left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{R} \; \overbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}^{s} \right)$$ Αναγμένος κλιμακωτός

$Rx = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ αρχικό ομογενές $\qquad RX = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ~~αρχικό με τις τιμές~~

$$A_{13}\left(-\tfrac{3}{2}\right) A_{23}\left(-\tfrac{1}{2}\right) M_3\left(-\tfrac{3}{7}\right) A_{32}(-3) A_{12}(1) M_2\left(\tfrac{1}{2}\right) A_3(-1) A_{21} A = I$$

$$A^{-1} = A_{13}\left(-\tfrac{3}{2}\right) A_{23}\left(-\tfrac{1}{2}\right) M_3\left(-\tfrac{2}{7}\right) A_{32}(-3) A_{12}(1) M_2\left(\tfrac{1}{2}\right) A_{32}(-1) A_{21}(-1)\, I$$

$$(I, A^{-1}) = A_{13}\left(-\tfrac{3}{2}\right) \underset{\text{ίδιες}}{\overset{\text{όλες οι}}{\cdots}} A_{21}(-1) = (A, I)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: Αν ο A είναι τετραγωνικός και με γραμμοπράξεις (γινόμενα στοιχειωδών πινάκων) καταλήξει στον ταυτοτικό, τότε έχει αντίστροφο. Μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο πολλαπλασιάζοντας τους στοιχειώδεις ή να κάνουμε τις ίδιες γραμμοπράξεις στον ταυτοτικό.

π.χ. να λυθεί το σύστημα

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad -1$$

$r_A < n$

$2 < 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$r_2 \to \tfrac{1}{3} r_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad r_1 \to r_1 + r_2$$

Ανηγμένος $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to$

$x_1 + \frac{1}{3} x_3 = 0$ ή $\frac{1}{3}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}$

$x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 0$ $\quad -\frac{2}{3}$ $\quad x_2 = \frac{2}{3} x_3 - \frac{2}{3}$.

Το $x_3 \in \mathbb{R}$ δεν περιορίζεται άρα άπειρες λύσεις

17/10/2014 $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1$

$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m$

γραμμές   άγνωστοι

Πίνακας συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Πίνακας σταθερών όρων

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Πίνακας αγνώστων

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \dots, & a_{1,n} & b_1 \\ a_{m,1}, & \dots, & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Το σύστημα γράφεται $Ax = b$

Για να λύσουμε θα πρέπει με κάποιο τρόπο να ~~[illegible]~~ έρθει "ισοδύναμο" στη μορφή

$$x = b' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_m' \end{pmatrix}$$

Αν υπάρχει A^{-1}, τότε θα γράφουμε $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = b'$ με $b' = A^{-1}b$

$A \quad \exists \quad A^{-1}$

$B \quad \exists \quad B^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

$(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$

Θα θέλουμε ο $(A \Gamma B)$ να έχει αντίστροφο. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x \quad - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}\right) \quad (A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Γραμμοπράξεις

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{aligned} x_1 + x + _3 &= 6 \\ -3x_2 - 4x_3 &= -18 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - 4x_3 &= -18 \\ 0 - x_2 - 3x_3 &= -13 \end{aligned}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_2 - 3x_3 &= -13 \\ -3x_2 - 4x_3 &= -18 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to -r_2} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 13 \\ -3x_2 - 4x_3 &= -18 \end{aligned}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_3 + 3r_2} \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_1 &= 13 \\ 5x_3 &= 21 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{5}r_3} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 13 \\ x_3 &= \tfrac{21}{5} \end{aligned}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} \begin{aligned} x_1 \quad 0 \quad - 2x_3 &= -7 \\ 0 \quad x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 0 \quad 0 \quad x_3 &= \tfrac{21}{5} \end{aligned}$$

Κλιμακωτός πίνακας συστήματος

$$r_2 \to r_2 - 3r_3 \quad x_2 \quad -2x_3 = -7$$

$$x_2 = \frac{-63}{5} + \frac{65}{5} = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = \frac{21}{5}$$

$$r_1 \to r_1 + 2r_3 \quad x_1 = \frac{35}{5} + \frac{42}{5}$$

$$x_2 = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = \frac{21}{5}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΩΝ

1) Πολλαπλασιασμός της γραμμής i με έναν αριθμό.

$M_i(a)$

2) Πρόσθεση στην i γραμμή πολλαπλάσιο της j γραμμής.

$A_{i,j}(a)$

3) Εναλλαγή των γραμμών i και j.

$E_{j,i}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Μπορούν να γίνουν αυτοί με ~~...~~ πίνακες;

$$M_i(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$ Δηλαδή

$$M_i(a) \begin{pmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} & b_1 \\ a_{i,1}, \dots, a_{i,n} & b_i \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, & b_1 \\ a a_{i,1}, \dots, a a_{i,n}, & a b_i \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

$$(M_i(a)^{-1}) = M_i\left(\frac{1}{a}\right) \qquad a \neq 0$$

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \to i \\ \to j \\ \\ \end{array}$$

i στήλη   j στήλη

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} A_{i,j}(a) = \\ r_i \to r_i + a r_j \end{array} \begin{pmatrix} i & & 0 \\ & j & \\ & 1 & a \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \text{ γραμμή} \\ \\ \end{array}$$

j γραμμή

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{A} & b \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Στοιχειώδης πίνακας F: $A_2(-\tfrac{?}{})\,A_{1,2}(-1)\,M_3(\tfrac{1}{3})\,A_{3,2}(3)\,M_2(-1)\,E_{2,3}\,A_{3,1}(-2)\,A_{2,1}(-3)\,E_{1,3}(A,b)$

$= A_{1}{}^{3}$

$A_{2,1}(-3)\,E_{1,3}(A,b)$

$$\left(I \;,\; \begin{matrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{21}{3} \end{matrix} \right)$$

$$A x = b \Rightarrow x = b'$$

Οι πίνακες $M_i(a)$, $A_{i,j}(a)$, $E_{i,j}$ ονομάζονται στοιχειώδεις πίνακες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A=(a_{ij})$ ένας πίνακας, ονομάζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τις εξής πράξεις.

1) Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής με a: $M_i(a)$

2) Πρόσθεση της j-γραμμής πολλαπλασιασμένης με a στην γραμμή i: $A_{ij}(a)$.

3) Εναλλαγή της i με την j. E_{ij}

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A και B δύο πίνακες. Ο B λέγεται γραμμοϊσοδύναμος με τον A, αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Παρ.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\0&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to \frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to -1r_3}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A_{13}(1)M_3(-1)M_2(\frac{1}{3})\underbrace{E_{23}A_{21}(1)}A_{23}(2)A=I\rightarrow$

$$A^{-1}=\left(A_{13}(1)\,M_3(-1)\,M_2(\tfrac{1}{3})\,E_{23}\,A_{21}(1)\,A_{23}(2)\right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας πίνακας καλείται κλιμακωτός αν

1) Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής είναι 1.
2) Η πρώτη μονάδα σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά της πρώτης μονάδας της προηγούμενης γραμμής.
3) Οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Αν επιπλέον, ισχύει ότι η πρώτη μονάδα είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στη στήλη της, τότε θα καλείται **ανηγμένος κλιμακωτός**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Ανηγμένος κλιμακωτός.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 35 \end{pmatrix}$$ όχι κλιμακωτό.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Ανηγμένος κλιμακωτός.

Πχ: Για ποια τιμή του k το σύστημα είναι συμβιβαστό (θέλουμε λύση)!

$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 = k$$

Πότε δεν έχουμε λύση; Όταν υπάρχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{7}r_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 3+k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 3+k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - 13r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10+k \end{pmatrix}$$

Αν αυτός έχει rank 3 (δηλαδή $k \neq 10$), τότε <u>δεν</u> έχουμε λύση.

Αν έχει rank 2 (δηλαδή $k = 10$), τότε έχουμε λύση και μάλιστα μοναδική.

24/10/2017

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -10 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rank} C = 3 \Leftarrow$$

Αν ο C είναι ανηγμένος κλιμακωτός 4×7 ανηγμένος, τότε το αρχικό σύστημα με τις 4 εξισώσεις είναι ισοδύναμο με τον αντίστοιχο του C για 3 εξισώσεις

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν λύνουμε σύστημα, κάνουμε μόνο γραμμοπράξεις.

Ερώτημα: Αντί για γραμμοπράξεις, δεν μπορούμε να κάνουμε στηλοπράξεις;

Βεβαίως, αλλά όχι για να λύσουμε σύστημα.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -10 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_5 \to \delta_5 - 2\delta_2 \\ \delta_7 \to \delta_7 + 10\delta_2 \\ \delta_8 \to \delta_8 - \sqrt{2}\,\delta_2 \end{array}$$

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_5 \to \delta_5 - 3\delta_4 \\ \delta_7 \to \delta_7 - 7\delta_4 \\ \delta_8 \to \delta_8 - 12\delta_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \delta_7 \to \delta_7 - 3\delta_6 \\ \delta_8 \to \delta_8 - 4\delta_6 \end{array}$$

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\overset{4\times 8}{C} = \underbrace{E_k \dots E_2 E_1}_{\substack{\text{τετραγωνικός} \\ 4\times 4}} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \underbrace{\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_m}_{\text{τετραγωνικοί}}$$

$$D = \underbrace{E_k \ldots E_1}_{\text{αντιστρέψιμος}} A \underbrace{\Sigma_1 \ldots \Sigma_m}_{\text{αντιστρέψιμος}} \qquad (AB)^t = B^t A^t$$

$$\underset{4\times 8}{A} \longrightarrow \underset{8\times 4}{A^t} \qquad D = E\,A\,\Sigma$$

πχ. Να εξετάσετε αν ο A έχει αντίστροφο και να τον βρείτε με γραμμοπράξεις.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1]{r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2]{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3]{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4]{r_3 \to r_3 + 5r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_5]{r_3 \to -2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_6]{r_1 \to r_1 - 4r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \to r_1 - r_3 \;\; (E_7) \\ r_2 \to r_2 - \frac{3}{2} r_3 \;\; (E_8) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & -2 \end{array}\right) = A^{-1} \qquad A^{-1} = E_8 E_7 E_6 \ldots E_1$$

$$I = \underbrace{E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1}_{A^{-1}} A$$

→

2) Πόρισμα

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας.

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) Ο A είναι αντιστρέψιμος

2) Ο A είναι το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

3) Το ομογενές σύστημα $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση.

$$(A^{-1})^{-1} = (E_k \dots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} = A.$$

1) ⇔ 2) A αντιστρέψιμος ⇔ ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο ταυτοτικός.
Άρα θα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_k$ ώστε $A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \dots E_1$.

1) ⇔ 3) A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow x = 0$ μοναδική λύση,
τότε το σύστημα θα γίνει $x_1 = 0$

$x_2 = 0$ Δηλαδή ο ανηγμένος κλιμακωτός = ταυτοτικός.

$x_3 = 0$

Γενικά, αν ο πίνακας είναι $m\times n$ με $m\neq n$, θα έχει βαθμίδα το πολύ (m, n)

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Στηλών

Ό,τι κάναμε με τις γραμμοπράξεις, μπορούμε να κάνουμε και με στηλοπράξεις. Αντίστοιχα ορίζονται οι στοιχειώδεις πίνακες στηλών, αλλά ο πολλαπλασιασμός γίνεται από δεξιά.

Ορισμός: Ο πίνακας B είναι στηλοϊσοδύναμος με τον A, αν υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$ ώστε $B = A\Sigma_1 \dots \Sigma_\ell$.

Θεώρημα: Αν ο R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός του A και εφαρμόσουμε στηλοπράξεις, τότε αυτός θα γράφεται στη μορφή:

$$N = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_k$ και $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$

ώστε $$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = E_k \dots E_1 A \Sigma_1 \dots \Sigma_\ell$$

Εδώ $r = \operatorname{rank} A$.

$\sim$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ Να έρθει στη μορφή $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank $A \leq 3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} r_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα rank$A = 2$ και δεν υπάρχουν άλλες γραμμοπράξεις.

Γιατί βγήκες τον άλλο πίνακα;;;

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P

~

Άρα $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

<u>Ορισμός</u>: Δύο πίνακες A και B καλούνται ισοδύναμοι, αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q ώστε $B=PAQ$.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε πίνακας A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα μορφής

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

και το r ισούται με τη βαθμίδα του A.

27/10/2017 1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rank A=3

Ανηγμένος $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

rank B=3

Ανηγμένος $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ο $n\times n$ A έχει αντίστροφο αν $\exists$ B $n\times n$ ώστε $AB = I_{n\times n} = BA$. Τότε $B = A^{-1}$.

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

5) $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 = 0$
$3x_2 + 2x_3 = -7$
$3x_1 + 2x_3 = 2.$

$4 = m$ εξισώσεις
$3 = n$ άγνωστοι

$m > n = 3$

$\Rightarrow$ επαυξημένος $(A,b) = 4x(3+1)$ → $\text{rank} \leq 4$

$\text{rank} \leq 3.$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αν $\text{rank}(A,b) = 4 \Rightarrow \text{rank}\, A = 3$
$\Rightarrow$ υπάρχει μονάδα ηγετική στην τελευταία στήλη. Άρα, τότε δεν έχει λύση.

Αν $\text{rank}\, A = \text{rank}(A,b) \Rightarrow$ έχουμε λύση.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 3r_2]{r_1 \to r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + 2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to \frac{1}{6} r_4]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -7/3 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 10r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 23/3 & -46/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - \frac{23}{3} r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank(A,b) = 3 = rank A
και δεν έχουμε στην τελευταία στήλη ηγετικό.
Άρα το σύστημα έχει λύση μοναδική

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - \frac{2}{3}r_3]{r_1 \to r_1 + \frac{4}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Άρα $\exists A^{-1}$. Δηλαδή το σύστημα γίνεται $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$ μοναδική

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

3 εξισώσεις
4 άγνωστοι

Αν έχουμε λύση, θα έχουμε άπειρες, γιατί $n > m$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank(A) = rank(A,b) = 2 έχουμε λύσεις.

4 άγνωστοι 2 εξισώσεις

Άρα από τους 4 αγνώστους οι δύο λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή και οι άλλοι δύο εξαρτώνται από αυτούς

$x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ οποιαδήποτε $\Rightarrow x_1, x_2$ εξαρτώνται από τους x_3, x_4

$\longrightarrow$

6) $\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{i}\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$

$i \neq 0$

$\xrightarrow[a \neq 0]{\gamma_3 \to \gamma_3 - a\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rank}A=3]{a=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2+2a \end{pmatrix}$ rank$A=2$ Αν $2+2a=0$ $a=-1$

Αν $a \neq -1 \Rightarrow$ rank $=3$, $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

• Να βρεθούν οι τιμές του $t \in \mathbb{R}$ ώστε ο A να έχει βαθμίδα 3, 2 ή 1.

$A = \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -t \\ 3 & 6 & -2 \\ t & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$t=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to$ rank$A=3$ για $t=0$.

$t \neq 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & 3t-2 \\ 0 & 3-3t & t^2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & 3t-2 \\ 0 & 3(1-t) & -(1-t)(t+1) \end{pmatrix}$ $2 \leq$ rank$A$ Για $t=1$. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank $=2$.

$t \neq 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & 3t-2 \\ 0 & 0 & (3t-2)(t-1)+t^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{t-1} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & 3t-2 \\ 0 & 0 & 3t-2+t+1=4t-1 \end{pmatrix}$

$2 \leq$ rank$A \leq 3$

Αν $4t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4} \Rightarrow$ rank$A=2$.

$t \neq \frac{1}{4}$ και $t \neq 1 \Rightarrow$ rank$A=3$

$\text{rank}A=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & \kappa & \lambda\\ 0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix}0 & 1 & \kappa\\ 0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ Ο A δεν θα έχει rank 1.

Θεώρημα: Έστω ένα γραμμικό σύστημα $Ax=b$ με m εξισώσεις και n αγνώστους και r η βαθμίδα του επαυξημένου $r=\text{rank}(A,b)$. Τότε:

1) Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός του (A,b) έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, τότε το σύστημα δεν έχει λύση. $\text{rank}A=r-1<\text{rank}(A,b)=r$.

2) Αν $\text{rank}A=\text{rank}(A,b)$ (ισοδύναμα δεν έχουμε ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη)

i) Αν $r=n$ (άγνωστοι), τότε έχει μοναδική λύση.

ii) Αν $r<n$ (άγνωστοι), τότε οι r άγνωστοι εξαρτώνται από τους $n-r$, οι οποίοι λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή.

$\boxed{\text{ΟΡΙΖΟΥΣΑ}}$

$\mathbb{Z}_p$ σώμα των ακεραίων (με τους αντιπροσώπους του ίσα δηλαδή)

Ερώτημα: Υπάρχουν απεικονίσεις από το σύνολο των πινάκων τους ρητούς ή πραγματικούς ή μιγαδικούς;

$\mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{Z}_p$

$f: M(n\times n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}\ (\mathbb{C})\ \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$A \mapsto f(A)=$ $\quad f(A)=\kappa$

$f: M(3\times 3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad f(B)=\lambda$ $\quad$ Θέλει $f(AB)=\kappa\lambda$

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \delta&\varepsilon&\zeta\\ \eta&\theta&\iota\end{pmatrix} \longmapsto \alpha$ ή $\alpha^2+\beta^2$ ή

$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\iota+\alpha^2-\gamma^2$

ή

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota$

$\alpha+\varepsilon+\iota=$ κύρια διαγώνιος

$=$ ίχνος του A

ΟΡΙΣΜΟΣ Ορίζουμε τη συνάρτηση ορίζουσα $\det: M(n\times n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ επαγωγικά στο n ως εξής: $n=1$ $\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$.

$n=2$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Γενικά, αν $A=(a_{i,j})$ είναι $n\times n$ πίνακας με $A_{i,j}$ συμβολίζουμε τον πίνακα $(n-1)\times(n-1)$ ~~που προκύπτει~~ από τον A, αν διαγράψουμε την i γραμμή του και την j στήλη του.

Ορίζουμε την συνάρτηση $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1})$

Εφαρμογή $n=2$. $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k1})$

$k=1 \; (-1)^2 a_{1,1} \det(A_{1,1})$

$k=2 \; (-1)^3 a_{2,1} \det(A_{2,1})$

$A_{1,1} = (a_{2,2})$ $A_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}$.

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \iota \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{\alpha} & \cancel{\beta} & \cancel{\gamma} \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \iota \end{pmatrix} \to A_{11} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \vartheta & \iota \end{pmatrix}$

$A_{12} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \vartheta & \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{pmatrix}$

$A_{22} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \eta & \iota \end{pmatrix}$ $A_{32} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \zeta \end{pmatrix}$.

κλπ.

$n=3$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$\det A = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \det(A_{k1}) =$

$= a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31} =$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$
$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} =$

$= a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{21}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{31}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

$\det A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$, $\det A_{21}=a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}$, $\det A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$.

Προσοχή: Μόνο για 3×3 πίνακες, η ορίζουσα δίνεται από:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Σημείωση: Αν ένας υπολογιστής κάνει 10^{11} πράξεις το δευτερόλεπτο για να υπολογίσει μια 25×25 ορίζουσα με τον τύπο, θα πρέπει να κάνει περίπου $25!\simeq 1{,}5\cdot 10^{25}$. Δηλαδή, θα χρειαζόταν 500.000 χρόνια.
Με τη μέθοδο του αναγόμενου κλιμακωτού χρειάζεται περίπου 10.000 πράξεις, ή λιγότερο από 1 δευτερόλεπτο.

Πρόταση: Αν ο A είναι διαγώνιος, τότε $\det A=a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.
Με επαγωγή στο n: $n=1$ $\det A=a_{11}$

$n=2$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-0\cdot 0=a_{11}a_{22}$.

$n=3$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}=\sum_{1}^{3}(-1)^{k+1}a_{11}\det A_{k,1}$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι 2×2 διαγώνιοι έχουν αυτήν την ιδιότητα.

$=a_{11}\det A_{11}-a_{21}\det A_{21}+a_{31}\det A_{31}=$

$=a_{11}\det A_{11}=a_{11}(a_{22}a_{33})$

διαγώνιος.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους $(n-1)\times(n-1)$ διαγώνιους, θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n\times n$ διαγώνιους:

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31} \dots (-1)^{n+1} a_{n1}\det A_{n1}$$

$= a_{11}\det A_{11}$ και A_{11} $(n-1)\times(n-1)$ διαγώνιος.

Από την υπόθεσή μας, θα έχουμε $\det A_{11} = a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$

Άρα $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$$

Πρόταση: Η ορίζουσα ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Με επαγωγή στο n. $n=2$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} = a_{11}a_{22}$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους $(n-1)\times(n-1)$ άνω τριγωνικούς

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1}\det A_{n1} = a_{11}\det A_{11}$$

Και ο A_{11} είναι $(n-1)\times(n-1)$ άνω τριγωνικός. Άρα $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Τετραγωνικοί Πίνακες

31/10/2017 $A=(a_{ij})$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1})$

$\det$ (Άνω-Κάτω Τριγωνικού) $= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Μπορούμε να υπολογίσουμε την det ως προς άλλη στήλη; Το ίδιο για γραμμή;

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ιδιότητες Οριζουσών)

1) Αν ο πίνακας A' δημιουργείται από τον A αφού πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή με c, τότε:
$\det A' = c \det A$.

2) Αν ο πίνακας A' δημιουργείται από τον A με εναλλαγή δύο γραμμών του, τότε:
$\det A' = -\det A$

3) Αν ο πίνακας A' δημιουργείται από τον A με πρόσθεση c φορές την c-γραμμή στην j-γραμμή τότε: $\det A' = \det A$.

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to R_1 \text{ (Row 1)} \\ \to R_2 \\ \\ \to R_n \end{array}$ $\quad A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ cR_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A' = c\det A = \det M_{i(c)} \det A.$

$A' = M_i(c) A \Rightarrow \det A' = c \det A = \det M_i(c) \det A$

$M_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ R_n \end{pmatrix}$

$\det A' = -\det A = \det E_{i,j} \det A$

$A' = E_{ij} A \qquad \det E_{i,j} = -1.$

στοιχειώδης

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \quad\ \ i \qquad j \end{array}$$

3) $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + cR_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

$A' = A_{i,j}(c) A$

$\det A' = 1 \cdot \det A = \det(A_{i,j}\, k) \det A.$

$A_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & c & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ Άνω τριγωνικός $\Rightarrow \det A_{ij}(c) = 1.$

Πχ. $\det\begin{pmatrix}0&1&5\\3&-6&9\\2&6&1\end{pmatrix} = \cancel{\left(0\cdot(-6)\cdot 1+1\cdot 9\cdot 5+9\cdot 6-5(-6)\cdot 2+1\cdot 3 = 6+9-5+54+60+3 = 127.\right)}$

$$= \begin{pmatrix}0&1&5&0&1\\3&-6&9&3&-6\\2&6&1&2&6\end{pmatrix} = 18+90+60-3 = 165.$$ ← με 3×3

με ζήλο

$\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\cdot a_{k,1}\det(A_{k,1}) =$ $\quad a_{1,1}=0 \quad \det A_{11} = \det\begin{pmatrix}-6&9\\6&1\end{pmatrix}$

$= -3(1-30)+2(9+30) =$ $\quad a_{2,1}=3 \quad \det A_{21} = \det\begin{pmatrix}1&5\\6&1\end{pmatrix}$

$= 87+78 = 165$ $\quad a_{3,1}=2 \quad \det A_{31} = \det\begin{pmatrix}1&5\\-6&9\end{pmatrix}$

με ιδιότητες.

$$\det\begin{pmatrix}0&1&5\\3&-6&9\\2&6&1\end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix}0&1&5\\1&-2&3\\2&6&1\end{pmatrix} =$$

$$= 3\det\begin{pmatrix}0&1&5\\1&-2&3\\0&10&-5\end{pmatrix} = 3\left[-1\det\begin{pmatrix}1&5\\10&-5\end{pmatrix}\right] = -3(-5-50) = 3\cdot 55 = 165$$

Scanned with CamScanner

Πχ $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Με ορισμό $\rightarrow$ $1\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -26 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -26 \end{pmatrix} = 3\cdot 7\cdot 1\cdot(-26) = (-546)$$

κάτω τριγωνικός

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & ca_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = c\det(\underset{A}{a_{i,j}})$$

$A = (a_{i,j})$, $cA = (ca_{i,j}) = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & ca_{14} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & \\ ca_{31} & \dots & \dots & \dots \\ ca_{41} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$\det(cA) = c^4 \det A$

$$\text{Π.χ. } \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot\det\begin{pmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} = (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{pmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & z-y \end{pmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

<u>Πρόταση</u>: Αν ο A έχει δύο γραμμές ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.

<u>Απόδειξη</u>: Μπορούμε από τη μία να αφαιρέσουμε την άλλη, ο νέος πίνακας θα έχει μία γραμμή 0. Άρα η ορίζουσα θα είναι μηδέν.

$\det E_{ij} = 1$

$n=2 \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det E_{12} = -1.$

<u>Ισχύει</u> για $n=2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους E_{ij} διάστασης μέχρι και $(n-1)\times(n-1)$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} \quad \det E_{12} = 0\det A_{11} - 1\det A_{21} + 0\det\ldots = -1\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots\ 1 & & \\ 1 & & & 0 & \\ & & & & 1 \ \ddots\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det E_{i\,i+1} = 1\det A_{11} = \det E^{n-1}_{i\,i+1} =$$

$$= \det E^{n-2}_{i\,i+1} = \ldots = 1\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$E_{i\,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & 0 \ 1 & \\ \vdots & & & 1 \ 0 & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\ i-1 \\ \vdots \\ i+j \left.\right\} \begin{array}{l} n-(i-1) \\ n-(i+j) \end{array} \end{array}$$

$$= \det E^{n-i+1}_{12} = -1$$

$$\det E_{i\,i+1} = -1$$

$$\det\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 1\\ \\ \\ 4\end{matrix} = -\det\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} = +\det\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} =$$

$$4-2.$$

$$= -\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow 2\\ \\ 4\end{matrix}$$

$4-1$ πάνω $\overset{\text{άρτιος.}}{\smile}$ περιττός

$4-1+4-2 = 8-2-1$ $\qquad (-1)^{8-2-1} = -1$

Πρόταση: Έστω οι πίνακες $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ και $C=(c_{ij})$ ώστε οι τρεις πίνακες να έχουν όλες τις γραμμές ίσες αντίστοιχα μεταξύ τους, εκτός από την i για την οποία ισχύει ότι η i-γραμμή του C είναι το άθροισμα της i-γραμμής του A και της i-γραμμής του B.

Τότε $\det C = \det A + \det B$

$$A = \begin{pmatrix}R_1\\R_2\\ \boxed{R_i}\\ \vdots\\ R_n\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}R_1'\\R_2'\\ \boxed{R_i'}\\ \vdots\\ R_n\end{pmatrix}$$ Μόνο εδώ διαφέρουν.

$R_i \neq R_i'$ $\qquad C \neq A+B$

$\det C = \det A + \det B.$

3/11/2017 ①

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 7r_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{3} r_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{4} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;4 \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{c_3 \to c_3 + \frac{1}{4} c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \to c_3 + \frac{1}{4} c_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$A_{3,1}(-1) A_{2,3}(-1) M_3(1/3) A_{3,2}(-1) A_{3,1}(-3) A_{2,1}(-3) = A$

$\underbrace{A_{3,1}(1/4) A_{3,2}(1/4) E_{4,3}}_{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{3\times 3}{P} A \underset{4\times 4}{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A_{3,2}(-1) M_2(1/4)}$

P

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) A, B $n\times n$

a) A, B αντιστρέψιμος $\Rightarrow$

b) AB αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\exists C (AB)C = I$

$C = B^{-1}A^{-1}$ a)

a) $\Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ a) AB αντιστρέψιμος $\Rightarrow A, B$ αντιστρέψιμοι

Έστω A ή B όχι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$

$E_k \ldots E_2 E_1 A \Sigma_1 \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r < n$

$(E_k \ldots E_1 A) B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ & \ddots \\ 0 & \cdots 1 & 0 \end{pmatrix} B$ έχει τουλάχιστον μια γραμμή 0.

Άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άτοπο.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (E_k \ldots E_1 A) B = \begin{pmatrix} * & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

γ) $\operatorname{rank} A = n = \operatorname{rank} B$

$E_2^{-1} \dots E_k^{-1} = A \Leftrightarrow A$ αντιστρ.

$H_1^{-1} \dots H_m^{-1} = B \Leftrightarrow B$ αντιστρ.

$$AB = \underbrace{E_1^{-1} \dots E_k^{-1} H_1^{-1} \dots H_n^{-1}}_{\text{αντιστρέψιμος}}$$

3) $A_{1\, m\times n}$ B

Λύση

$r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B \Leftrightarrow \exists\, \Gamma$ αντιστρέψιμος

$A = B\Gamma$ ή $A\Gamma = B$

$E_k \quad E_1 A \Sigma_1 \quad \Sigma_m = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H_e \quad H_1 B \Theta_1 \dots \Theta_t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_1 E \dots E_1 A \Sigma_1 \Sigma_{\Sigma_3} = H_e \dots H\, H_1 B$ $\qquad A = E^{-1} H B \Sigma^{-1}$

$E^{-1} E A \Sigma = E^{-1} H B \Rightarrow A \Sigma \Sigma^{-1} = E^{-1} H B \Sigma^{-1}$

4) A, B όμοιοι $\Leftrightarrow A = \Gamma B \Gamma^{-1}$

A, B όμοιοι $\Rightarrow A^k, B^k$ όμοιοι

A^t ← transpose ανάστροφος

$$A^k = (\Gamma B \Gamma^{-1})^k = \underbrace{(\Gamma B \cancel{\Gamma^{-1}})(\cancel{\Gamma} B \cancel{\Gamma^{-1}})(\cancel{\Gamma} B \Gamma^{-1})}_{k-\text{φορές}}$$

$$A^k = (\Gamma B \Gamma^{-1})^k = \Gamma B^k \Gamma^{-1}$$

5) $A = (a_{i,j})$ τετραγωνικός $n \times n$ (trace = προσθέτεις τα στοιχεία της διαγωνίου)

$$\text{trace}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$tr(AB) = tr(BA)$

$$C = AB = \left(c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)$$

$$C' = BA = \left(c'_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} a_{tj}\right)$$

Θέλουμε $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c'_{ii}$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} c'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} + \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k2} + \sum_{k=1}^{3} a_{3k} b_{k3} =$$

$$= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} + a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} + a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} + a_{33} b_{33}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} b_{ik} a_{ki} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} b_{1k} a_{k1} = b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + b_{13} a_{31}$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_{2k} a_{k2} = b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} + b_{23} a_{32}.$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_{3k} \ldots$$

$\rightarrow$

a_{ik} $\quad k=i \Rightarrow a_{ik}b_{ki} = b_{ik}a_{ki}$

$i=1,\ldots,n$

$k=1,\ldots,n$

$b_{ik}a_{ki}$ $\quad i=k \quad b_{ik}\,a_{ik}$

$i=1,\ldots,n$ $\qquad b_{ki}a_{ik} = a_{ik}b_{ki}$

$k=1,\ldots,n$

$$a_{ki}b_{ik} = b_{ik}a_{ki}$$

επειδή το πλήθος και των δύο αθροισμάτων είναι το ίδιο και κάθε όρος του πρώτου αθροίσματος είναι και όρος του δεύτερου, τα αθροίσματα είναι ίσα μεταξύ τους.

β) $A = \Gamma B \Gamma^{-1} \Rightarrow tr\,A = tr(\Gamma B \Gamma^{-1})$

$$= tr(\Gamma^{-1}(\Gamma B)) = tr(IB) = tr B$$

(6)
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{rank} A = 1.$$

$r_4 \to \frac{1}{3} r_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} A \geq 2$$

$$r_2 \to r_2 - 2r_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 0 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - (r+2) r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε rank $A=2$

Αν $r-2$ ή $s-1 \neq 0 \Rightarrow$ θα έχουμε rank $A=3$.

$r=2$ και $s=1 \Rightarrow$ rank $A=2$.

7) $\det A = 0 \Leftrightarrow a=1$ ή 2 ή 4.

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a-4 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \det A = (a-1)(a-4)(a-2)$$

$\det B = 0$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, Αν $a=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 1$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-a^2 & a-a^2 \\ a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} (1-a)(1+a) & a(1-a) \\ a(1-a) & (1-a)(1+a) \end{pmatrix}.$$

$a=1 \Rightarrow \det B = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ $a \neq 1 \Rightarrow \det B = (1-a)^2 \det \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$.

$= (1-a)^2 ((1+a)^2 - a^2) = (1-a)^2 (1+2a)$.

Αν $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \det B = 0$.

8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & k \\ -1 & -2 & 0 & 3 & k \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k\times k} \qquad \det A = k!$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$$

Θα προσθέσουμε την πρώτη στις υπόλοιπες

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & k \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & & ? \\ 0 & 0 & 3 & ? & & ? \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 4 & & & \\ & & & 5 & & \\ 0 & & & 0 & \ddots & k \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k = k!$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1})$$

A άνω-κάτω τριγωνικός

$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$

$\det A_{ij}(a) = 1$	$A_{ij}(a)^{-1} =$
$\det M_i(a) = a$	$M_i(a)^{-1} = M_i\left(\frac{1}{a}\right)$
$\det E_{ij} = -1$	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$

Ιδιότητες

$\det(A_{ij}(a)A) = \det A = \det A_{ij}(a) \det A$

$\det(M_i(a)A) = a \det A = \det M_i(a) \det A$

$\det(E_{ij}A) = -\det A = \det E_{ij} \det A$

→ [Δηλαδή ορίζουσα είναι η πολλαπλασιαστική για γινόμενο στοιχειωδών με τυχαίο.

Αν ο A έχει δύο γραμμές ίσες, τότε $\det A = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες. Τότε $\det(AB) = \det A \det B$

Έστω $E_1, \dots, E_k$ στοιχειώδεις πίνακες.

Τότε $\det(E_k \boxed{\dots E_1 B}) \det E_k \det E_{k-1} \det E_1 \det B$

$\det(E_k A) \overset{(*)}{=} \det E_k \det A = \det E_k \det E_{k-1} \det(E_{k-2} \dots E_1 B) = \dots$

$= \det E_k \dots \det E_1 \det B.$

Έστω A τυχαίος $\Rightarrow E_k \dots E_1 A = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\to$ $\operatorname{rank}A = n$: $I_{n\times n}$; $\operatorname{rank}A < n$: $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει μία γραμμή 0 $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A$ $\to$ $\det E_1^{-1} \dots \det E_k^{-1}$; $\to 0$

$\det(AB) = \det E_1 \dots \det E_k \det\left(\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B\right) =$ $\xrightarrow{\operatorname{rank}A = n}$ $\det E_1 \dots \det E_k \det I \det B = \det A \det B$; $\xrightarrow{\operatorname{rank}A < n}$ $\det E_1 \dots \det E_k \det\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\operatorname{rank}A < n \Rightarrow \det A = 0$

$\det(AB) = \det E_k \dots \det E_1 \cdot 0 = 0.$

$\det(AB) = 0 = \det A \det B.$

Πόρισμα

$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0 \iff A$ αντιστρέψιμη.

Πρόταση

$\det A^t = \det A$.

Απόδειξη: $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\operatorname{rank} A = n} A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$

$\xrightarrow{\operatorname{rank} A \neq n} A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ μία τουλάχιστον γραμμή μηδέν

$\det A = 0$.

$A^t = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t (E_k^{-1})^t \cdots (E_1^{-1})^t$

$\det A^t = \det(\ )^t \det (E_k^{-1})^t \cdots \det (E_1^{-1})^t = \det A.$

$\det(\ ) \det E_k^{-1} \cdots \det E_1^{-1} = \det((\ ) E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) = \det A.$

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}.$

$A^t = (a'_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{n2} & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$

$a'_{ij} = a_{ij}$

$\det A^t = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A'_{k1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$

Αναπτύσσουμε ως προς γραμμή η στήλη.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$-1 \quad -1$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} a_{k3} \det A_{k3}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$\det A = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+p} a_{kp} \det A_{kp} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+q} a_{qk} \det A_{qk}$$ ή γραμμή

ρ στήλη

$p = 1, \dots, n.$

$q = 1, \dots n$

[illegible] **ΘΕΩΡΗΜΑ**: Έστω A είναι $n\times n$ πίνακας. Τα επόμενα ισοδύναμα.

α) A αντιστρέψιμος

β) Το σύστημα $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

γ) Ο ανηγμένος κλιμακωτός του A είναι ο $I_{n\times n}$

δ) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ε) Το σύστημα $Ax=b$ έχει μοναδική λύση

στ) $\det A\neq 0$

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{kl}\det A_{kl}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{lk}\det A_{lk}$$

Παρατήρηση: Αν $\det A\neq 0$, τότε $\exists A^{-1}$ και $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$

$$AA^{-1}=I_{n\times n}\Rightarrow \det(AA^{-1})=\det I_{n\times n}=1\Rightarrow \det A\det(A^{-1})=1\Rightarrow \det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

Θεώρημα: Αν $\det A\neq 0$, τότε $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ij}\right)^t$

Π.χ. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\4&3&2\end{pmatrix}$ Να βρεθεί A^{-1}.

$$\det A=\begin{matrix}1&2&3&1&2\\2&1&2&2&1\\4&3&2&4&3\end{matrix}=(12+6+8)+2+16+18=26+36=10$$

$\exists A^{-1}$

$\det A_{11}=\det\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=-4$ | $\det A_{21}=\det\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}=-5$ | $\det A_{31}=\det\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=1$

$\det A_{12}=\det\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}=-4$ | $\det A_{22}=\det\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=-10$ | $\det A_{32}=\det\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}=-4$.

$\det A_{13}=\det\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=2$ | $\det A_{23}=\det\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}=5$ | $\det A_{33}=\det\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=-3$.

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&+4&2\\+5&-10&+5\\1&+4&-3\end{pmatrix}^t=\qquad A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&5&1\\4&-10&4\\2&5&-3\end{pmatrix}$$

Λύση Τετραγωνικών Γραμμικών Συστημάτων με Ορίζουσα

Μέθοδος Cramer

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow Ax = b$$

Υποθέτουμε ότι $\det A \neq 0$, άρα $\exists A^{-1}$

Η μέθοδος Cramer δίνει τη μοναδική λύση χωρίς να βρούμε το A^{-1}

Για κάθε άγνωστο x_i, ορίζουμε έναν νέο πίνακα χρησιμοποιώντας τον A και b και τον ονομάζουμε A_i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_n & a_n & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ο A_i δημιουργείται από τον A αν αντικαταστήσουμε την στήλη του με τη στήλη b.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Θεώρημα (Cramer): Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η λύση του συστήματος $Ax=b$ δίνεται

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i=1,\dots,n.$$

Π.χ. Να λυθεί το σύστημα με τον κανόνα του Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 60 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 6 \\ 60 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 12+12+8+12 = 44 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Πρέπει να υπολογίσουμε $\det A_1, \det A_2, \det A_3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 60 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 60 & 4 & 6 & 60 & 4 \\ 8 & -2 & 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} = 72-240-64+72 = -304+144 = -160$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 60 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 60 & 6 & -3 & 60 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 180-36-48+120-48+54 = 222$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{222}{44}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 60 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \det A_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 60 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 32+36+24+12 = 212$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{212}{44}$$

Θεώρημα: Αν $\det A \neq 0$, τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ij}\right)^{t}$.

Η ορίζουσα του Vandermonde

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^n \\ \vdots & a_2 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$(n+1)\times(n+1)$ Αν $a_0 = \cdots = a_n = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Αν $a_i = a_j$, για $i \neq j$, τότε δύο γραμμές του A, θα είναι ίσες $\Rightarrow \det A = 0$

Θεωρούμε ότι $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$.

$\det A = \ldots$

Με επαγωγή στο n, $n=1$ $\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} = a_1 - a_0$

$n=2$, $\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 0 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0^2 \\ 0 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0^2 \\ a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0^2 \end{pmatrix} =$

$= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_0 \\ 1 & a_2 + a_0 \end{pmatrix} = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_0 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{pmatrix}$.

$= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)$

$n=3$, $\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)(a_3 - a_0)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{t=0}^{i-1} (a_i - a_t)$$

$$n=3,\ \prod_{i=1}^{3} \prod_{t=0}^{i-1} (a_i - a_t), \quad i=1 \ \prod_{t=0}^{0} (a_1 - a_t) = (a_1 - a_0)$$

$$i=2 \ \prod_{t=0}^{1} (a_2 - a_t) = (a_2 - a_0)(a_2 - a_1).$$

$$i=3 \ \prod_{t=0}^{2} (a_3 - a_t) = (a_3 - a_0)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^n \\ \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{pmatrix}} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 0 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0^2 & \dots & a_1^n - a_0^n \\ 0 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0^2 & \dots & a_2^n - a_0^n \\ \vdots \\ 0 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0^2 & & a_n^n - a_0^n \end{pmatrix}$$

$(1 \ a_0 \ a_0^2 \dots a_0^n)$

$$\to (a_1 - a_0)(0 \quad 1 \quad a_1 + a_0 \quad \frac{a_1^3 - a_0^3}{a_1 - a_0} \quad \frac{a_1^n - a_0^n}{a_1 - a_0}$$

$$\to (a_2 - a_0)(0 \quad 1 \quad a_2 + a_0 \quad \frac{a_2^3 - a_0^3}{a_2 - a_0} \quad \frac{a_2^n - a_0^n}{a_2 - a_0}.$$

$$\to (a_n - a_0)(0 \quad 1 \quad a_n + a_0 \quad \frac{a_n^3 - a_0^3}{a_n - a_0} \quad \dots \quad \frac{a_n^n - a_0^n}{a_n - a_0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ & \\ & \end{pmatrix}^t$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \to \det A_{11} = 45 - 48 = -3$$

$$(-1)^{1+1}(-3) = 3 \qquad (-1)^{1+2} = -1.$$

A_{12} (

6/11/2017

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{t=0}^{i-1} (a_i - a_t)$$

$n=1$, $n=2$ ισχύει, Υποθέτουμε ότι ισχύει για n θα το δείξουμε για $n+1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n+1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \text{πολυώνυμο ως προς } x = f(x).$$

Η μέγιστη δύναμη του x στο $f(x)$ είναι $n+1$.

(Για $x=a_1 \Rightarrow f(a_1)=0$, αλλά και για κάθε a_i) $x=a_i \Rightarrow f(a_i)=0$, $i=1,\dots,n+1$.

Δηλαδή τα a_i είναι ρίζες του $f(x)$. Άρα $\boxed{f(x)=c(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}$. $\oplus$

κάποιος όρος ή πολυώνυμο.

$c=$;;;

$(x-a_1)\dots(x-a_{n+1})$ είναι $n+1$ βαθμού.

Το $f(x)$ είναι και αυτό $n+1$ βαθμού.

Άρα το c δεν είναι πολυώνυμο. Δεν έχει x. Είναι σταθερά.

$f(x) = cx^{n+1} + \dots$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή.

$f(x) = 1\det A_{11} - x\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n+2} x^{n+1} \det A_{1,n+2}$.

Άρα $c = (-1)^{n+2} \det A_{1,n+2}$

Αλλά $\det A_{1,n+2}$ είναι Vandermonde ορίζουσα διάστασης n. Από επαγωγή γνωρίζουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & & a_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{t=1}^{i-1} (a_i - a_t) \quad \oplus\oplus$$

$\oplus, \oplus\oplus \rightarrow f(x) = \left(\prod_{i=2}^{n+1} \prod_{t=1}^{i-1} (a_i - a_t)\right)(x-a_1)\dots(x-a_{n+1})$

$\longrightarrow$

$x = a_0 \Rightarrow h(a_0)$ είναι η ορίζουσα Vandermonde που ζητάμε να αποδείξουμε.

$$h(a_0) = (-1)^{n+1}(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_{n+1})\prod_{i=2}^{n+1}\prod_{t=1}^{i-1}(a_i-a_t) =$$

$$=(a_1-a_0)(a_2-a_0)\ldots(a_{n+1}-a_0)\prod_{i=2}^{n+1}\prod_{t=1}^{i-1}(a_i-a_t) = \prod_{i=1}^{n+1}\prod_{t=0}^{i-1}(a_i-a_t)$$ Αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Εφαρμογή: Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Αν το $p(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες, τότε είναι το μηδενικό.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + x^{n-1}$$

Έστω ότι οι ρίζες είναι $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Δηλαδή $p(t_i)=0 \quad i=1,\ldots,n$.

$$(*)\begin{cases} a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \ldots + a_{n-2}t^{n-2} + a_{n-1}t^{n-1} = 0 \\ a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 + \ldots + a_{n-2}t_2^{n-2} + a_{n-1}t_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \ldots + a_{n-2}t_n^{n-2} + a_{n-1}t_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Για να γνωρίζουμε το $p(x)$, θα πρέπει να βρούμε τους συντελεστές του: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Δηλαδή έχουμε το σύστημα.

$(*)$ ως προς $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$

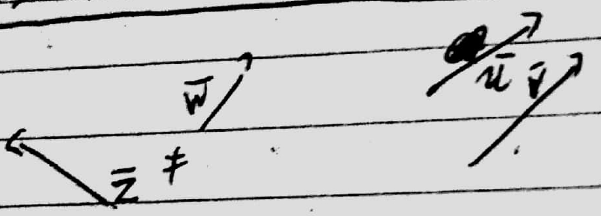
$$A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1}\end{pmatrix} \Rightarrow \det A \neq 0$$ Vandermonde.

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow a_i = 0,\ i=0,\ldots,n-1,$$ Άρα το $p(x)=0$.

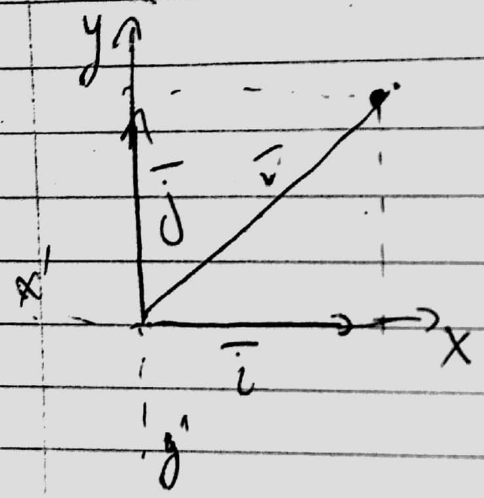
Scanned with CamScanner

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ – ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ



• ← μηδενικό διάνυσμα με μήκος 0.

O.

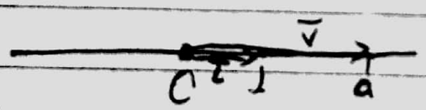


$2,1\bar{i} + 1,2\bar{j} = \bar{v}$

πραγματικοί

Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

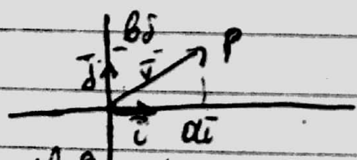
• ℝ



Κάθε σημείο του ℝ αντιστοιχίζεται με το διάνυσμα $\bar{v}$ με αρχή το O και τέλος το a.
Το O αντιστοιχίζεται με το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0}$.
Αν θεωρήσουμε ένα βασικό διάνυσμα με "μήκος" 1 το $\bar{i}$.
Τότε, κάθε διάνυσμα στην ευθεία ℝ περιγράφεται από το $\bar{i}$ και έναν πραγματικό αριθμό.

$\bar{v} = a\bar{i}$

• $\mathbb{R}^2$ επίπεδο



Στο επίπεδο κάθε σημείο του P αντιστοιχίζεται με ένα διάνυσμα $\bar{v}$ με αρχή το O και τέλος το P. Το $\bar{v}$ περιγράφεται με τη βοήθεια των $\bar{i}$ και $\bar{j}$. Δηλαδή είναι το άθροισμα $a\bar{i} + b\bar{j} = \bar{v}$.

Είναι αναγκαίο να έχουμε δύο διανύσματα στο επίπεδο, τα οποία να μην είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου. Αυτά θα τα λέμε γραμμικώς ανεξάρτητα.

→

• $\mathbb{R}^3$ χώρος

Στο χώρο μπορούμε να φανταστούμε 3 διανύσματα τα οποία δεν "εξαρτώνται" μεταξύ τους. Είναι και αυτά μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αυτό που βλέπουμε για τα παραπάνω που παραδείξαμε είναι ότι έχουμε ένα σύνολο (το σύνολο των διανυσμάτων με αρχή το βασικό σημείο) στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε δύο πράξεις με "καλές" ιδιότητες.

Έχουμε ένα σύνολο V και δύο πράξεις:

$$\boxed{+} : V \times V \to V \quad (*)$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V \quad (**)$$

Οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες.

$$* \ (v_1, v_2) \mapsto v_1 \boxed{+} v_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V$$
$$** \ (a, v_1) \mapsto a \odot v_1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, v_1 \in V.$$

Για την πρώτη πράξη ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) Προσεταιριστική: $(v_1 \boxed{+} v_2) \boxed{+} v_3 = v_1 \boxed{+} (v_2 \boxed{+} v_3)$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$
2) Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο το οποίο συμβολίζουμε με $\bar{0}$ ώστε $v_1 \boxed{+} \bar{0} = v_1 = \bar{0} \boxed{+} v_1$, $\forall v_1 \in V$
3) $\forall v_1$ υπάρχει ένα v_2 το οποίο καλούμε αντίθετο του v_1, ώστε: $v_1 \boxed{+} v_2 = \bar{0} = v_2 \boxed{+} v_1$
4) $v_1 \boxed{+} v_1' = v_1' \boxed{+} v_1$, $\forall v_1, v_1' \in V$

Για τη δεύτερη πράξη ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

5) $a \odot (v_1 \boxed{+} v_2) = (a \odot v_1) \boxed{+} (a \odot v_2)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ και $v_1, v_2 \in V$
6) $(a+b) \odot v = (a \odot v) \boxed{+} b \odot v$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ και $v \in V$
7) $a(b \odot v) = (ab) \odot v$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.
8) $1 \odot v = v$, $\forall v \in V$

→

Πχ. 1) $V=\mathbb{R}$ $\boxplus$ = πρόσθεση, $\odot$ = πολλαπλασιασμός.

2) $V=\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ με $(x,y)\boxplus(x',y')=(x+x', y+y')$

$c\odot(x,y)=(cx, cy)$.

Πρέπει να ισχύουν και οι 8 ιδιότητες

Προσεταιριστική ισχύει $((x,y)\boxplus(x',y'))\boxplus(x'',y'')=(x+x', y+y')\boxplus(x'',y'')=$

$=((x+x')+x'', (y+y')+y'')=(x+(x'+x''), y+(y'+y''))=$

$=(x,y)\boxplus((x',y')\boxplus(x'',y''))$ ισχύει στους πραγματικούς.

Ουδέτερο στοιχείο $(0,0)$

Αντίθετο του (x,y) είναι $(-x,-y)$.

Αντιμεταθετική: $(x,y)\boxplus(x',y')=(x+x', y+y')=(x'+x, y'+y)=(x',y')\boxplus(x,y)$.

5) $a\odot((x,y)\boxplus(x',y'))=a\odot(x+x', y+y')=(a(x+x'), a(y+y'))=$

$=(ax+ax', ay+ay')=(ax, ay)\boxplus(ax', ay')=a\odot(x,y)\boxplus a\odot(x',y')$.

6) $(a+b)\odot(x,y)=((a+b)x, (a+b)y)=a\odot(x,y)\boxplus b\odot(x,y)$.

7) $a\odot(b\odot(x,y))=a\odot(bx, by)=(abx, aby)=(ab)\odot(x,y)$

8) $1\odot(x,y)=(1x, 1y)=(x,y)$.

Πχ. $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$ με πράξη πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένες.

$(x_1,\dots,x_n)\boxplus(x_1',\dots,x_n')=(x_1+x_1',\dots,x_n+x_n')$

$c\odot(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n)$

είναι διανυσματικός χώρος, διότι ικανοποιούνται οι 8 ιδιότητες

Πχ. $M(m\times n, \mathbb{R}) = \{$όλοι οι $m\times n$ πίνακες με στοιχεία πραγματικών$\}$.
Η πράξη $\boxplus$ είναι η πρόσθεση πινάκων.
Η πράξη $\odot$ είναι γινόμενο αριθμού με πίνακα.
Με αυτές τις πράξεις ισχύουν και οι 8 ιδιότητες
Άρα το $M(m\times n, \mathbb{R})$ είναι δ.χ.

Εξετάστε αν το V είναι διανυσματικός χώρος με αυτές τις πράξεις.

Πχ $V=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $(x,y)\boxplus(x',y')=(x+x', y+y')$, $c\odot(x,y)=(x,y)$.

Οι 4 ιδιότητες της $\boxplus$ ισχύουν από προηγούμενο παράδειγμα.

$$c\odot((x,y)\boxplus(x',y'))=c\odot(x+x', y+y') \overset{\odot}{=} (x+x', y+y')$$

$$(c\odot(x,y))\boxplus(c\odot(x',y'))=(x,y)\boxplus(x',y')$$

$$(c+c')\odot(x,y)=(x,y)$$
$$c\odot(x,y)\boxplus c'\odot(x,y)=(x,y)\boxplus(x,y)=(2x,2y)$$

Άρα το V με αυτές τις πράξεις δεν είναι δ.χ.

Πχ. $V=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $(x,y)\boxplus(x',y')=(xx', yy')$, $c\odot(x,y)=(cx,cy)$. Είναι δ.χ.;

Ουδέτερο της $\boxplus$.
Έστω ότι είναι το $(e,e')\in V$. Πρέπει $(x,y)\boxplus(e,e')=(x,y)$

$$(xe, ye')=(x,y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} xe=x \\ \text{και} \\ ye'=y \end{array}\right\} \Rightarrow e=1=e'.$$

Αντίθετος του $(0,0)$.
Είναι το (a,b) ώστε: $(0,0)\boxplus(a,b)\overset{*}{=}(1,1)$ (Το V με αυτές τις πράξεις δεν είναι δ.χ.)
$0\cdot a=1$ και $0\cdot b=1$, άρα δεν είναι δ.χ.

[illegible] ο $M(m\times n, \mathbb{R})$ με τις πράξεις των πινάκων $M(m\times n, \mathbb{R})$ δ.χ.

2) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}\}$ με πράξεις κατά συντεταγμένες $\mathbb{R}^n$ δ.χ.

3) $P_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{R}\}$

πολυώνυμα βαθμού το πολύ n με την πρόσθεση των πολυωνύμων $\cdot x^n$

$(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)$

$c(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n) = ca_0+ca_1x_1+\dots+ca_nx^n$

Με αυτές τις πράξεις το P_n είναι δ.χ.

$P_0 = \{a_0 \mid a_0\in\mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$P_1 = \{a_0+a_1x$ πρωτοβάθμια $\}$

$3\in P_1$

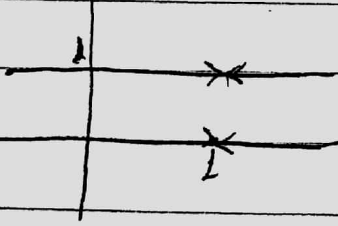
$\left.\begin{array}{l} 3+2x\in P_1 \\ -6-2x\in P_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2x+(-6-2x) = -3\in P_1$

4) $C = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής$\}$

$F = (f+g)+h = f+(g+h) = G$

$F(x) = G(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

5) $A = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όχι συνεχής$\}$ $\quad f,g\in A \to f+g\in A$, αν η πράξη είναι καλά ορισμένη.



$g(x) = \begin{cases} 0 & \forall x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} 1 & x\neq 1 \\ [illegible] & x=1 \end{cases}$

$f+g\notin A \to$ Η πράξη δεν είναι καλά ορισμένη $\Rightarrow$ A με αυτή τη πράξη δεν είναι δ.χ.

6) $M(3\times 1, \mathbb{R}) \supseteq W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

W είναι δ.χ. με τις ίδιες πράξεις.

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ a+b+a'+b' \end{pmatrix} \in W \\ &c\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \\ ca+cb \end{pmatrix} \in W \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Πράξεις καλά ορισμένες.}$$

$W' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Οι 8 ιδιότητες στο W ισχύουν γιατί ισχύουν στον δ.χ. $M(3\times 1, \mathbb{R})$
Δηλαδή ο $W \subsetneq M(3\times 1, \mathbb{R})$ είναι δ.χ. μέσα σε έναν άλλο δ.χ.
Αυτός θα ονομάζεται <u>υπόχωρος</u> $W \leq M(3\times 1, \mathbb{R})$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ a''+b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ a''+b'' \end{pmatrix} \right)$$

Ορισμός: Έστω V δ.χ. και $W \subseteq V$ ώστε $W \neq \emptyset$. Αν το W με τις πράξεις του V είναι δ.χ., τότε καλείται υπόχωρος του V και γράφουμε $W \leq V$.

Πρόταση: Έστω V δ.χ. και $W \subseteq V$. Το W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, αν οι πράξεις του V στο W είναι καλά ορισμένες.

Απόδειξη: $\Rightarrow$) Αν $W \leq V$ προφανώς οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

$\Leftarrow$) Γνωρίζουμε ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

Αρκεί να ισχύουν οι 8 ιδιότητες. Αλλά οι ιδιότητες ισχύουν στον V. Άρα θα ισχύουν και στον W, διότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

α) $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$.

β) $\forall w \in W$ και $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cw \in W$

Αν σ' ένα υποσύνολο ισχύουν αυτές οι δύο ιδιότητες, τότε είναι υπόχωρος).

Παρ. $P_0 = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \subseteq P_1 = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$.
$P_0 \leq P_1$ διότι ισχύουν οι ιδιότητες α) β)
$P_k \leq P_{k+n}$.

Πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες α), β)

$(a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k) + (b_0 + b_1 x + b_k x^k) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_k + b_k)x^k \in P_k$

$c(a_0 + \dots + a_k x^k) = ca_0 + \dots + ca_k x^k \in P_k$

Έστω $A = \{f \in P_k$ και $f(1) = 0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)g(x)$ και $g(x) \in P_{k-1}$.

Είναι $\leq P_k$;;;

α) $f, g \in A$ πρέπει $f+g \in A \Leftrightarrow (f+g)(1) = 0$;;; $f(1) + g(1) = 0+0=0$.

β) $(cf) \in A \Leftrightarrow (cf)(1) = 0 \Leftrightarrow cf(1) = 0$ ισχύει

$A \leq P_k$.

$B = \{f \in P_k$ και $f(1) = 1\}$.

$B \leq P_k$;;;

α) $f, g \in B$ πρέπει $f+g \in B \Leftrightarrow (f+g)(1) = 1$ $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 1+1 = 2 \neq 1$.

$f+g \notin B \Rightarrow B \not\leq P_k$.

Προσοχή : Αν ένα υποσύνολο W ενός δ.χ. V δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, τότε δεν είναι ισχυρός.

$W \leq V$ ισχύουν οι δύο ιδιότητες. Άρα αν $w \in W \Rightarrow 0 \cdot w \in W \Rightarrow \bar{0} \in W$ μηδενικό διάνυσμα

Θεώρημα: Έστω V δ.χ.

α) Το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό

β) Το αντίθετο διάνυσμα ενός διανύσματος είναι μοναδικό.

γ) Αν $u+v = u+w \Rightarrow v = w$

δ) Αν $u+x = w \Rightarrow x = w-u$

Δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

ε) $-(-u) = u$

στ) $0 \cdot u = \bar{0}$ μηδενικό διάνυσμα.

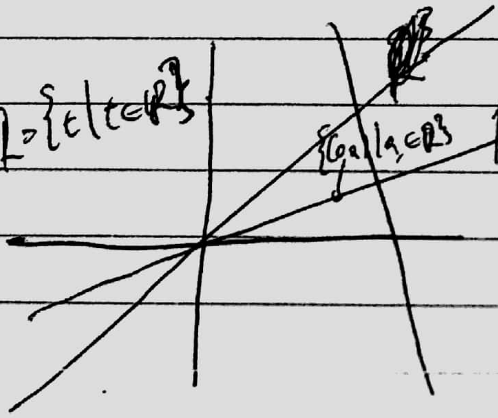
ζ) $-(cu) = (-c)u$

Π.χ. $P_0 \le P_1 \le P_2 \le P_3 \le \dots$

$P_\infty = \{$όλα τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές$\}$.

$\mathbb{R} \le \mathbb{R}^2 \le \mathbb{R}^3$

$\{a \mid a\in\mathbb{R}\}$ $\{(a,0) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$



1) Οι υπόχωροι ευθείες του $\mathbb{R}^2$ που ταυτίζονται με το $\mathbb{R}$ πρέπει να περνούν από το $(0,0)$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες. Έστω V ευθεία από το $(0,0)$ στον $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow V=\{tV \mid t\in\mathbb{R}\}$.

$V\le\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$ a) $tV+t'V=(t+t')V\in V$

b) $c(tV)=(ct)V=t'V\in V$.

Άρα $V\le\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2=\{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)$

$\{(0,0)\}\neq\emptyset$ $\{(0,0)\}\le\mathbb{R}^2$ Διάσταση 0

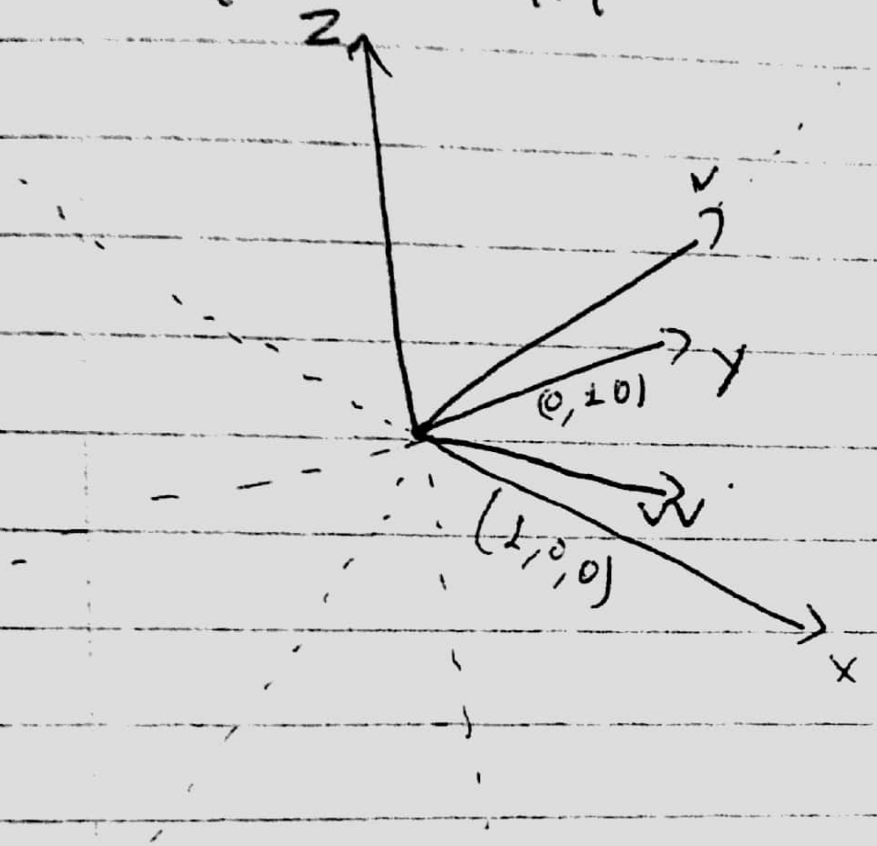
Μικρότερος στον $\mathbb{R}^2$ $\{(0,0)\}$ σημείο

Ενδιάμεσα $\{tV \mid t\in\mathbb{R}\}$. Διάσταση 1 ευθεία

Άπειροι υπόχωροι

Μεγαλύτερος στον $\mathbb{R}^2$ ο εαυτός του. Διάσταση 2 επίπεδο

Ας βρεθούν οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.



Μηδενικός $\{(0,0,0)\}$.

$V=\{tv \mid t\in\mathbb{R}\}$.

Ευθείες από το $(0,0,0)$.

Οριζόντιο επίπεδο

$\{(x,y,0) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

$(x,y,0)=x(1,0,0)+y(0,1,0)$.

Υπάρχουν άπειρα επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$ τα οποία διέρχονται από το $(0,0,0)$.

Κάθε επίπεδο περιγράφεται από δύο τεμνόμενες ευθείες οι οποίες διέρχονται από το $(0,0)$. Κάθε ευθεία περιγράφεται από ένα διάνυσμα. Άρα το επίπεδο περιγράφεται από δύο διανύσματα τα u και v $\{tu+sv \mid t,s\in\mathbb{R}\}$.

21/11/2017 Άσκηση 1 $A=\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\1&4&3&0&0\\0&1&4&3&0\\0&0&1&4&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\1&4&3&0&0\\0&1&4&3&0\\0&0&1&4&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\0&1&3&0&0\\0&1&4&3&0\\0&0&1&4&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}=$$

Με επαγωγή έχει το 5

$$=\det\begin{pmatrix}1&3&0\\1&4&3\\0&1&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&3\\0&1&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}=$$

$$=1.$$

Άσκηση 2 $x, a_1, a_2, a_3\in\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix}x&a_1&a_2&a_3\\a_1&x&a_2&a_3\\a_1&a_2&x&a_3\\a_1&a_2&a_3&x\end{pmatrix}$

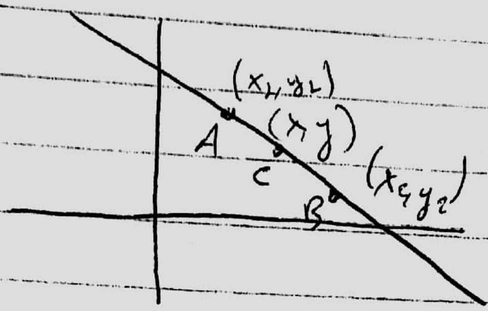
$$\det\begin{pmatrix}x&a_1&a_2&a_3\\a_1&x&a_2&a_3\\a_1&a_2&x&a_3\\a_1&a_2&a_3&x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}x+a_1+a_2+a_3&a_1&a_2&a_3\\ \text{''}&x&a_2&a_3\\ \text{''}&a_2&x&a_3\\ \text{''}&a_2&a_3&x\end{pmatrix}=$$

$$=(x+a_1+a_2+a_3)\det\begin{pmatrix}1&a_1&a_2&a_3\\1&x&a_2&a_3\\1&a_2&x&a_3\\1&a_2&a_3&x\end{pmatrix}=(x+a_1+a_2+a_3)\det\begin{pmatrix}1&a_1&a_2&a_3\\0&x-a_1&0&0\\0&a_2-a_1&x-a_2&0\\0&a_2-a_1&a_3-a_2&x-a_3\end{pmatrix}$$

$$=(x+a_1+a_2+a_3)\det\begin{pmatrix}x-a_1&0&0\\a_2-a_1&x-a_2&0\\a_2-a_1&a_3-a_2&x-a_3\end{pmatrix}=(x+a_1+a_2+a_3)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

Άσκηση 3

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$



$AC = \lambda CB$ (για πιο εύκολα)

$(x - x_1, y - y_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y)$

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$

$AC = \lambda AB$

$(x - x_1, y - y_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1)$

$y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = (x - x_1)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \Rightarrow y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = ax + y_1 - ax_1 \Rightarrow y = ax + b.$$

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = Ax + By + \Gamma = 0.$$

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y_1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y_1 \end{pmatrix} =$$

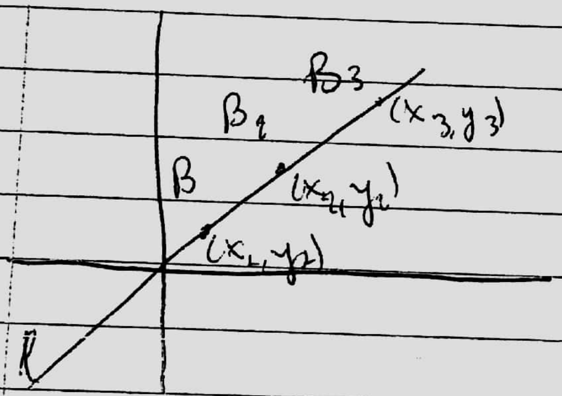
$$= (x_1 - x)(y_2 - y_1) - (y_1 - y)(x_2 - x_1) = 0.$$

Scanned with CamScanner

Άσκηση 5

$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n) \in l$ ευθεία.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & & \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$ Για $n=3$, $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rank} A < 3$



$B_1B_2 = \lambda B_1B_3$ (+)

$(x_2-x_1, y_2-y_1) = \lambda(x_3-x_1, y_3-y_1)$

Αν $B_3 \notin l \Rightarrow$ Δεν ισχύει η (+).

Δηλαδή όχι

ανάστροφος

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 0 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}$$

Για να έχουμε $\operatorname{rank}A<3 \Leftrightarrow$ η γραμμή $(x_2-x_1, y_2-y_1, 0)$ να είναι πολλαπλάσιο της $(x_3-x_1, y_3-y_1, 0)$.

Δηλαδή ισχύει η (+). Άρα τα τρία σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία. Το ίδιο ισχύει και για περισσότερα σημεία.

Άσκηση 6

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2+n-1 & 2 & 1 & & 1 & 1 \\ 2+n-1 & 1 & 2 & & 1 & 1 \\ & & & & & \\ 2+n-1 & 1 & 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=(n+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & & & \\ & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 2 \end{pmatrix} = (n+1)\det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = n+1$$

Άσκηση 7

$$\begin{aligned} x-4y+az &= a+b \\ ax+y+z &= 4 \\ x-y+z &= b \end{aligned}$$

$AX=B$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a+b \\ 4 \\ b \end{pmatrix}$

Για να έχει λύση μοναδική $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -a^2+3a-2 = -(a-2)(a-1)$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2, 1$ έχουμε μοναδική λύση.

$a=1 \rightarrow$ άπειρες λύσεις

$\rightarrow$ ΟΧΙ ΛΥΣΗ $\longrightarrow \operatorname{rank}A < \operatorname{rank}(A,B)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}A<3$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1+b \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & -4 & 1 & 1+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & b-4 \\ 0 & -5 & 0 & 1+b-4 \end{pmatrix} \leftarrow -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4-b}{2} \\ 0 & -5 & 0 & 1+b-4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4-b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1+b-4+5\frac{4-b}{2} \end{pmatrix}$$

Αν $1+b-4+5\frac{4-b}{2}=0$, τότε άπειρες λύσεις.

Αν $a+b-4+5\frac{4-b}{2}\neq 0$, τότε $\operatorname{rank}A=2<\underset{=3}{\operatorname{rank}(A,B)}$ ΟΧΙ λύση

Υπενθύμιση: Ένα υποσύνολο $W \neq \emptyset$ του δ.χ. V καλείται υπόχωρος $\Leftrightarrow$

1) $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

2) $\forall c \in \mathbb{R}$ και $\forall w \in W \Rightarrow cw \in W$

$W \leq V$.

Πχ. Αν το υποσύνολο W του δ.χ. $\mathbb{R}^3$ δίνεται από $W = \{ t(1,1,1) + s(0,1,1) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$ δείξτε ότι $W \leq \mathbb{R}^2$

$t(1,1,1) + s(0,1,1) \in W \Rightarrow$
$t'(1,1,1) + s'(0,1,1)$ πρέπει

$t(1,1,1) + s(0,1,1) + t'(1,1,1) + s'(0,1,1) \in W$

$(t+t')(1,1,1) + (s+s')(0,1,1) \in W$ ισχύει

$c(t(1,1,1) + s(0,1,1)) \in W$ πρέπει

$\underbrace{ct}_{t'}(1,1,1) + \underbrace{cs}_{s'}(0,1,1) \in W$ ισχύει

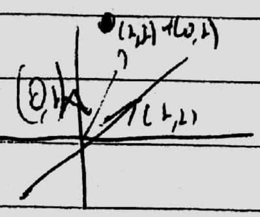
$W \leq \mathbb{R}^3$

Εδώ δείξε ότι W "γεννάται" από τα διανύσματα $(1,1,1)$ και $(0,1,1)$.

Γράφουμε $W = \langle (1,1,1)\ (0,1,1) \rangle$

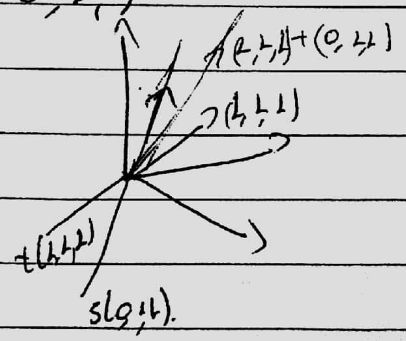
$W = \{ (t,\ t+s,\ t+s) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$

$(t, t+s, t+s) = (t,t,t) + (0,s,s) = t(1,1,1) + s(0,1,1)$.



$W' = \{ t(1,1) + s(0,1) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$

Έστω (a,b) τυχαίο του $\mathbb{R}^2$, ανήκει αυτό στο W;



Αν ναι $\Rightarrow W = \mathbb{R}^2$

Για να ισχύει $(a,b) \in W'$ πρέπει να βρούμε t και s που εξαρτώνται από τα a και b ώστε $(a,b) = t(1,1) + s(0,1)$

$a = t \Rightarrow t = a$

$b = t + s \Rightarrow s = b - a$

$(a,b) = a(1,1) + (b-a)(0,1) \in W'$

Δηλαδή το σημείο $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,1)$ και $(0,1)$.

Έστω (a,b,c) σημείο $\in \mathbb{R}^3$. Μπορούμε να το γράψουμε σαν $(a,b,c) = t(1,1,1) + s(0,1,1)$;;;

$$\left.\begin{aligned} a &= t \\ b &= t+s \\ c &= t+s \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = c$$ Αλλά δεν είναι απαραίτητο για το σημείο.

(a,b,c) π.χ. $(1,2,3) \notin W$

Άρα $W \neq \mathbb{R}^3$ και είναι επίπεδο.

24/11/2017 Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Πχ. $S=\{(1,1),(0,1)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2=\langle S\rangle \Leftrightarrow \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$ τυχαίο, τότε υπάρχουν κ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $(a,b)=\kappa(1,1)+\lambda(0,1)$. γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $S\subseteq\mathbb{R}^2$

Βλέπουμε ότι $\nexists\ \kappa\in\mathbb{R}$ ώστε $(1,1)=\kappa(0,1) \Leftrightarrow \kappa 0=1$!!!

Τα στοιχεία του S καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα.

1) Γεννά = Παράγει
2) Γραμμικά Εξαρτημένα
3) Γραμμικά Ανεξάρτητα

Πχ. $S=\{(1,1,1),(0,1,1)\}\subseteq\mathbb{R}$

Το S δε γεννά τον $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ δεν γράφεται κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

$\nexists\ \kappa\in\mathbb{R}$ με $(1,1,1)=\kappa(0,1,1)$, $\kappa 0=1$!!!

Παρατήρηση: V δ.χ.

Θέλουμε ένα υποσύνολο S του V με την ιδιότητα να γεννά τον V.

$\langle S\rangle=V$ και το S να είναι "ελάχιστο".

$\mathbb{R}^3 - \langle S\rangle \neq \mathbb{R}^3$

$S'=S\cup\{\cancel{(1,0,0)}\}=\{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,0)\}$

$(1,0,0)=\kappa(1,1,1)+\lambda(0,1,1)=(1,1,1)+(-1)(0,1,1)$

$1=\kappa \quad \lambda=-1$

$0=\kappa+\lambda \Rightarrow 0=\kappa+\lambda$, άρα δεν για αυτό

διότι αυτό είναι γραμμικώς εξαρτημένο από τα στοιχεία του S.

$S' = S \cup \{0,1,0\}$ ✓

$(0,1,0) = k(1,1,1) + \lambda(0,1,1)$

$0 = k$

$1 = k + \lambda \Rightarrow \nexists\, k, \lambda$. Άρα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$0 = k + \lambda$

Πρέπει επίσης $<S> = \mathbb{R}^3$.

Πρέπει κάθε σημείο (a,b,c) να είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S':

$\exists\, k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε: $(a,b,c) = k(1,1,1) + \lambda(0,1,1) + \mu(0,1,0)$

Βρες k, λ, μ συναρτήσει a, b, c

$a = k \Rightarrow k = a$

$b = k + \lambda + \mu \Rightarrow \mu = b - k - \lambda = b - a - (-a) =$

$c = k + \lambda \Rightarrow \lambda = c - a$.

$= b - c = \mu$

S' έχει δύο σημαντικές ιδιότητες: 1) Τα στοιχεία του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

2) Τα στοιχεία του γεννούν τον χώρο.

Το S' θα καλείται "βάση" του $\mathbb{R}^3$.

$S'' = S' \cup \{(1,2,3)\}$

Το S'' είναι γραμμικά εξαρτημένο

$(1,2,3) = (1,1,1) + 2(0,1,1) + (-1)(0,1,0)$

Ορισμός: Έστω V δ.χ. και $v_1, v_2, \dots, v_k, u$ στοιχεία του. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν, $a_1, a_2, \dots, a_k$ ώστε $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$, τότε το u καλείται γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_k$ (παράγεται από τα $v_1, \dots, v_k$).

Π.χ. Δείξτε ότι το μηδενικό διάνυσμα $(0,0,0,0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,3,4)$, $(2,0,1,-2)$ και $(3,2,4,2)$.

Βρες κ, λ, μ ώστε: $(0,0,0,0) = \kappa(1,2,3,4) + \lambda(2,0,1,-2) + \mu(3,2,4,2) =$

$= (\kappa + 2\lambda + 3\mu,\ 2\kappa + 2\mu,\ 3\kappa + \lambda + 4\mu,\ 4\kappa + (-2)\lambda + 2\mu)$

$0 = \kappa + 2\lambda + 3\mu$

$0 = 2\kappa + 2\mu$

$0 = 3\kappa + \lambda + 4\mu$

$0 = 4\kappa - 2\lambda + 2\mu$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\kappa + \mu = 0$ Για οποιαδήποτε $\neq 0$ τιμή του μ, έχουμε $\kappa = -\mu$ και $\lambda = -\mu$.

$\lambda + \mu = 0$ Δηλαδή για $\mu = 1$, $\kappa = -1$, $\lambda = -1$

$(0,0,0,0) = (-1)(1,2,3,4) + (-1)(2,0,1,2) + 1(3,2,4,2)$

$\mu = 2,\ \kappa = -2,\ \lambda = -2$.

$\{(1,2,3,4),(2,0,1,-2),(3,2,4,2)\}$

$<(1,2,3,4),(2,0,1,-2),(3,2,4,2)> = <(2,0,1,-2),(3,2,4,2)> =$
$= <(1,2,3,4),(3,2,4,2)> = <(1,2,3,4),(2,0,1,-2)> = W$.

$(1,2,3,4)+(0,0,0,0) = -(2,0,1,-2)+(3,2,4,2)$.

Ορισμός: Έστω $S \subseteq V$ δχ. Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του V εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S. Τότε θα λέμε ότι το S γεννά τον V, $<S> = V$

Ερώτημα: Πότε το παραγόμενο S θα είναι ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα;

Όταν δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε κανένα στοιχείο του, διότι τότε δεν θα γεννά τον V.
$S = \{v_1, \ldots, v_2\}$ $\quad V = <S>$.
Αν το v_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε το V δεν χρειάζεται.

Ορισμός: Έστω $S \subseteq V$ δχ. με την ιδιότητα το μηδενικό διάνυσμα να μην γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S. Τότε το S καλείται γραμμικώς ανεξάρτητο

$(0,0,0,0) = \overset{0}{k}(1,2,3,4) + \overset{0}{\lambda}(2,0,1,-2)$

$0 = k+2\lambda \quad 2\lambda = 0 \qquad$ Δεν επιτρέπεται $k=\lambda=0$!!

$0 = 2k \to k = 0$

$0 = 3k+\lambda, \quad 0 = 4k-2\lambda$

→

Ορισμός: Έστω $S \subseteq V$ π.χ. Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του V εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S και ότι το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε, το S θα καλείται βάση του V.

Π.χ. είναι το σύνολο $S=\{t^3, t^2+2t, t^3+2t+1\}$ βάση του $P^3 = \{$όλα τα πολυώνυμα μέχρι και 3ου βαθμού$\}$

Αρκεί: 1) Το S να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο
2) Το S να γεννά το P^3

1) $0 = \kappa t^3 + \lambda(t^2+2t) + \mu(t^3+2t+1)$
↑ μηδενικό πολυώνυμο.

$0 = (\kappa+\mu)t^3 + \lambda t^2 + (2\lambda+2\mu)t + \mu$

$\left.\begin{array}{l} \kappa+\mu=0 \\ \lambda=0 \\ 2\lambda+2\mu=0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \kappa=0 \\ \lambda=0 \\ \mu=0 \end{array}$ Δεν επιτρέπεται.

Άρα το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

2) $P^3 = \langle S \rangle \iff at^3+bt^2+ct+d = \kappa t^3 + \lambda(t^2+2t) + \mu(t^3+2t+1)$.

Βρες κ, λ, μ συναρτήσει a, b, c, d

$a = \kappa+\mu \to \kappa = a-\mu = a-d$.

$b = \lambda \to \boxed{\lambda = b.}$

$c = 2\lambda+2\mu \to \boxed{c = 2b+2d.}$ (+)

$d = \mu \to \boxed{\mu = d.}$

Η σχέση (+) περιορίζει τα πολυώνυμα που μπορούμε να πάρουμε.
Εμείς, όμως, θέλουμε να πάρουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο.
Άρα το S δεν γεννά το P^3.

Μήπως μπορούμε να επεκτείνουμε το S ώστε να γεννά το P^3.

$S' = S \cup \{t^2+3t\}$.

$at^3+bt^2+ct+d = \kappa t^3 + \lambda(t^2+2t) + \mu(t^3+2t+1) + \nu(t^2+3t)$

Βρες a, b, c, d συναρτήσει $\kappa, \lambda, \mu, \nu$.

$a = \kappa + \mu \longrightarrow \boxed{\kappa = a - \mu = a - d}$

$b = \lambda + \nu$

$c = 2\lambda + 2\mu + 3\nu$

$d = \mu \longrightarrow \boxed{\mu = d}$

$\left.\right\} c - 3b = 2\lambda + 2\mu + \cancel{3\nu} - 3\lambda - \cancel{3\nu}$

$c - 3b = -\lambda + 2\mu \Rightarrow \lambda = 2d - c + 3b$

$\nu = b - \lambda = b - (2d - c + 3b) \Rightarrow \nu = b - 2d + c - 3b = c - 2d - 2b$

Άρα το S' γεννά τον P^3.

$P^3 = \langle S' \rangle$ και το S' είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Π.χ. Βάση του $\mathbb{R}^n$

Με $e_i^n = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \ldots, 0)$

$\mathbb{R}^n = \langle e_1^n, e_2^n, \ldots, e_n^n \rangle$ ΚΑΝΟΝΙΚΗ

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\mathbb{R}^4 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

$(a, b, c, d) = a e_1^4 + b e_2^4 + c e_3^4 + d e_4^4$

Π.χ. Βάση του P^n

$S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ ΚΑΝΟΝΙΚΗ

$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot 1$

<u>Προσοχή</u>: Η βάση ενός δ.χ. <u>δεν</u> είναι μοναδική

Έστω $\{v_1, \dots, v_k\}$ να είναι μια βάση του δ.χ. V. Αν $u \in V$ τυχαίο, τότε: υπάρχουν αριθμοί $a_1, \dots, a_k$ ώστε $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$

Πρόταση: Αν το σύνολο $\{v_1, \dots, v_k\}$ αποτελεί βάση του δ.χ. V, τότε η αναπαράσταση ενός τυχαίου διανύσματος είναι μοναδική.

Απόδειξη: Έστω ότι το u έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις:

$u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$

$u = a_1' v_1 + \dots + a_k' v_k$

$\overline{0} = (a_1 - a_1') v_1 + \dots + (a_k - a_k') \cdot v_k$ οι παρενθέσεις δεν είναι όλες μηδέν.

Δηλαδή είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Αδύνατον, διότι είναι στοιχεία της βάσης.
Άρα η αναπαράσταση είναι μοναδική.

Θεώρημα: Αν μια βάση S ενός δ.χ. V αποτελείται από n στοιχεία, τότε και κάθε άλλη βάση θα αποτελείται από n στοιχεία.

Ορισμός: Αν μια βάση S του δ.χ. V έχει n στοιχεία, τότε η διάσταση του V ορίζεται να είναι η $\dim V = n$

Π.χ. $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim P^k = k+1$

$\dim M(2\times 3, \mathbb{R}) = ;$

Πρέπει να βρω βάση.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} = \overset{\alpha}{a_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \overset{\beta}{a_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \overset{\gamma}{a_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \overset{\delta}{a_4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \overset{\varepsilon}{a_5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \overset{\zeta}{a_6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$, παράγει τον $M(2\times3,\mathbb{R})$.

Αρκεί αυτοί οι πίνακες να είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.

Για $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+$

$+a_5\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+a_6\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=0.$

Επειδή είναι όλα μηδέν θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$M(2\times3,\mathbb{R})=6.$

Για $m\times n$

Έχουμε $m\times n$.

γραμμική/-α.

28/11/2017 V δ.χ., $S \subseteq V$ υποσύνολο, $V = \langle S \rangle$ γεννά το V

Όταν κάθε στοιχείο του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S.

Να βρείτε το μικρότερο S με αυτή την ιδιότητα.

Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, όταν το μηδενικό διάνυσμα <u>δεν</u> γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S.

Το S αποτελεί βάση του V <u>αν</u>:

1) $V = \langle S \rangle$, 2) Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Αν το S έχει k στοιχεία και είναι βάση, τότε κάθε άλλη βάση θα έχει k στοιχεία.

<u>Ορισμός</u>: Αν το $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ αποτελεί βάση του δ.χ. V, τότε ορίζεται η διάσταση του V να είναι k. $\dim V = k$.

Π.χ. $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim P^k = k+1$

$\dim M(m \times n, \mathbb{R}) = mn$.

Π.χ. $P^\infty = \{$όλα τα πολυώνυμα$\}$.

$\dim P^\infty = \infty$.

Μια βάση του P^k είναι το σύνολο $\{1, t, t^2, \dots, t^k\}$, ενώ μια βάση του P^∞ είναι το $\{1, t, t^2 \dots\}$.

Ας υποθέσουμε ότι $\dim P^\infty = n$.

Άρα θα έχει μια βάση με n στοιχεία.

$S = \{ \underbrace{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)}_{\text{πολυώνυμα}} \}$

Έστω $k = \max\{\underbrace{\deg}_{\text{βαθμός}} f_1(t), \deg f_2(t), \dots, \deg f_n(t)\}$.

Τότε το πολυώνυμο t^{k+1} <u>δεν</u> μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

$t^{k+1} = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)$

$f_1(t) = t^{100} + 5t^{49} - 1 \rightarrow \deg f_1(t) = 100$

$f_2(t) = -t^{3} + 3t^2 + 10t \rightarrow \deg f_2(t) = 3$

$f_3(t) = \sqrt{2}\, t^{35} - 1 \rightarrow \deg f_3(t) = 35$

$\max\{100, 3, 35\} = 100.$

$t^{101} = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t)$

$$\frac{t^{101}}{t^{100}} = \frac{a_1 t^{100}}{t^{100}} + \frac{5 a_1 t^{49}}{t^{100}} + a_3\sqrt{2}\frac{t^{35}}{t^{100}} + \dots$$

$t = a_1 + 5\frac{1}{t^{51}} + \dots$

$\lim_{t \to \infty}: +\infty = a_1$ άρα αδύνατο για $t \to \infty$, αφού ισχύει (δεν ξέρουμε ποιος, αλλά ισχύει)

Αλλά αυτό είναι αδύνατο. Άρα η διάσταση του P^∞ είναι το ∞.

Πως βρίσκουμε η διάσταση ενός υποχώρου W;

Πχ. Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου W που γεννάται από τα διανύσματα $(1,3,1,1)$, $(2,-2,2,-1)$, $(3,1,3,0)$

$W = \langle (1,3,1,1), (2,-2,2,-1), (3,1,3,0) \rangle$.

$\frac{1}{2} \le \dim W \le 3.$

$\{(1,3,1,1)\}$ γρ. ανεξ.

$\{(1,3,1,1), (2,-2,2,-1)\}$ είναι γρ. ανεξ.;

NAI → $\{(1,3,1,1), (2,-2,2,-1), (3,1,3,0)\}$

OXI: επιλέγω $\{(1,3,1,1), (3,1,3,0)\}$.

NAI: $\dim W = 3$

OXI: $\dim W = 2$

$(0,0,0,0)=a_1(1,3,1,1)+a_2(2,-2,2,-1)+a_3(3,1,3,0)$

$$\left.\begin{aligned}0&=a_1+2a_2+3a_3\\0&=3a_1-2a_2+a_3\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+}\begin{aligned}0&=a_1+2a_2+3a_3\\0&=4a_1+4a_3\Rightarrow a_1=-a_3\end{aligned}$$

$0=a_1+2a_2+3a_3$

$0=a_1-a_2\Rightarrow a_1=a_2$

$0=a_1+2a_2+3a_3$

$a_1=-a_3$

$a_1=a_2$.

Άρα για οποιαδήποτε τιμή του a_1 (ή a_2 ή a_3) έχουμε λύση.

Αν θέλουμε $a_1=5\Rightarrow a_2=5$ και $a_3=-5$

Άρα το πρώτο ή το δεύτερο ή το τρίτο διάνυσμα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή, είναι εξαρτημένα.

$W=\langle(1,3,1,1),(2,-2,2,-1)\rangle$

Επειδή αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $\dim W=2$.

$$\begin{pmatrix}1&3&1&1\\2&-2&2&-1\\3&1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{rank}]{\times(-2),\ \times(-3)}\begin{pmatrix}1&3&1&1\\0&-8&0&-3\\0&-8&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{pmatrix}1&3&1&1\\0&-8&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

rank = 2

$W=\langle(1,3,1,1),(2,-2,2,-1),(3,1,3,0)\rangle$

$=\langle(1,3,1,1),(0,-8,0,-3)\rangle$.

$(2,-2,2,-1)=a_1(1,3,1,1)+a_2(0,-8,0,-3)$

$$\left.\begin{aligned}2&=a_1\\-2&=3a_1-8a_2\end{aligned}\right\}\rightarrow -2=6-8a_2\rightarrow a_2=1.$$

~~$2=a_1$~~

$-1=a_1-3a_2\rightarrow -1=2-3$.

Για $a_1=2$, $a_2=1$ ισχύει

Scanned with CamScanner

Θεώρημα: Έστω V δχ και $S=\{v_1, \dots, v_k\}$ μια βάση του.
Τότε, κάθε υποσύνολο το οποίο θα περιέχει τουλάχιστον $k+1$ στοιχεία, θα είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Απόδειξη: $\dim V = k$. Αν $S' = \{w_1, \dots, w_{k+1}\} \subseteq V$, τότε το S' είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
Αν το S' ήταν γρ. ανεξάρτητο, τότε μια βάση του V, θα είχε τουλάχιστον $k+1$ στοιχεία. Αλλά $\dim V = k$. Άτοπο.

Πόρισμα: Αν $\dim V = k$ και $S=\{v_1, \dots, v_k\}$ είναι μια βάση, τότε κάθε υποσύνολο του S θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Πχ. Εξετάστε αν το σύνολο $S=\{(1,3,1,1),(2,-2,2,-1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^4$.
Αν όχι να το επεκτείνετε σε βάση. $\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow$ Το S δεν είναι βάση.
Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Για να γίνει, χρειαζόμαστε δύο ακόμη διανύσματα, ώστε όλα μαζί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ \dots & & \dots & \\ \dots & & \dots & \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τα διανύσματα $(1,3,1,1)$, $(0,-8,0,-3)$, $(0,0,1,0)$ και $(0,0,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πρόταση: Έστω V δχ. και $S \subseteq V$.
1) Αν το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε υπάρχει υποσύνολο S' του V, ώστε $S \subseteq S'$ και το S' είναι βάση.
2) Αν το S παράγει-γεννά τον V, τότε υπάρχει υποσύνολο του S', το οποίο είναι βάση του V, $S' \subseteq S$.

Πχ. $\dim P^{\infty} = \infty$ Βάση $\{1, t, t^2, \dots\}$
Πότε ένα άπειρο σύνολο θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο;;;
Όταν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
$\{t, t^{105}, t^{1020}, t^{3033333}\}$
$\{t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}\}$.

Πχ. να βρείτε μια βάση του $Y = \{(2x, 3x+y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ και να τη συμπληρώσετε σε βάση του $\mathbb{R}^3$.
$Y \subseteq \mathbb{R}^3$. Είναι $Y \leq \mathbb{R}^3$;;;
1) $(2x, 3x+y, y) + (2x', 3x'+y', y') = (2(x+x'), 3(x+x') + (y+y'), y+y') \in Y$.

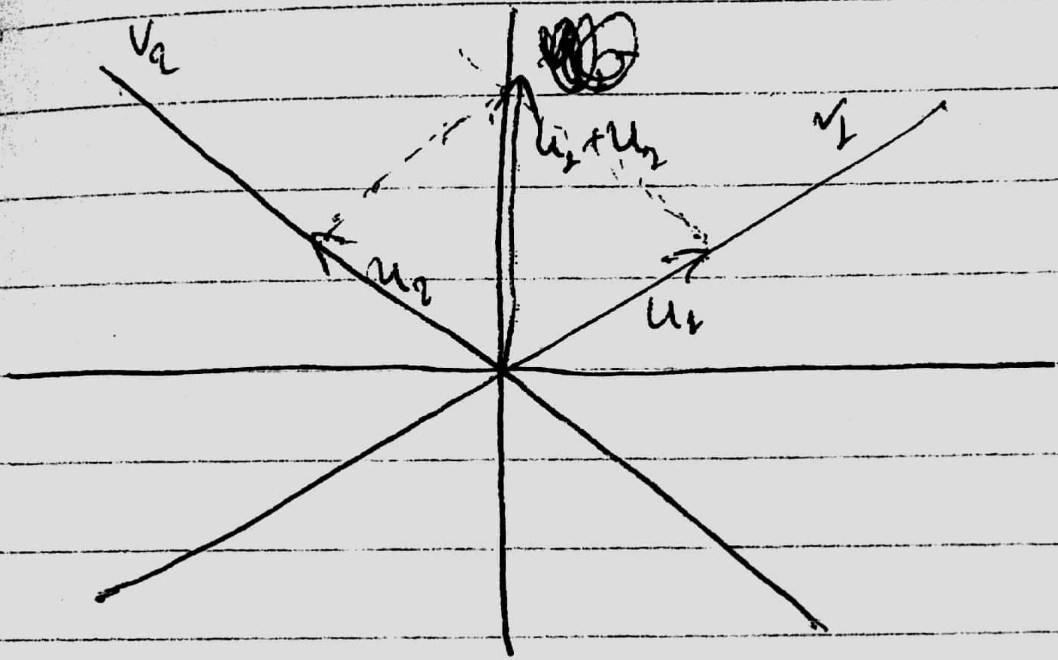
2) $a(2x, 3x+y, y) = (2ax, 3ax+ay, ay) \in Y$.

Βάση του Y $(2x, 3x+y, y) = (2x, 3x, 0) + (0, y, y) = x(2,3,0) + y(0,1,1)$.
Το τυχαίο διάνυσμα του Y γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $(2,3,0)$ και $(0,1,1)$.
$Y = \langle (2,3,0), (0,1,1) \rangle$
Επειδή είναι και γραμμικώς ανεξάρτητο αποτελούν βάση του Y.

$\left.\begin{array}{l}\dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \dim Y = 2\end{array}\right\}$ Άρα χρειάζονται ένα ακόμη γρ. ανεξ. με τα προηγούμενα.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Άρα μια βάση συμπληρώνεται σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 = \langle (2,3,0), (0,1,1), (0,0,1) \rangle.$$



$$V_1 \cup V_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in V_1 \text{ ó } (x,y) \in V_2\}.$$

$$V_1 \cup V_2 \not\leq \mathbb{R}^2.$$

Φυλλάδιο 5

2/12/2018 1) $V=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$

$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=((x_1^3+x_2^3)^{1/3},(y_1^3+y_2^3)^{1/3})$

$a\odot(x_1,y_1)=(ax_1,ay_1)$.

Να εξετάσετε αν ισχύουν οι 8 ιδιότητες. Οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

1) $((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3)=(x_1,y_1)\oplus((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3))$.

Αναλυτικά και βλέπω ότι ισχύει.

$((x_1^3+x_2^3)^{1/3},(y_1^3+y_2^3)^{1/3})\oplus(x_3,y_3)=\left(\left(\left((x_1^3+x_2^3)^{1/3}\right)^3+x_3^3\right)^{1/3},\left(\left((y_1^3+y_2^3)^{1/3}\right)^3+y_3^3\right)^{1/3}\right)=$

$=\left(\underbrace{((x_1^3+x_2^3)+x_3^3)}_{\text{προσεταιριστική ισχύει στους πραγματικούς}}{}^{1/3},((y_1^3+y_2^3)+y_3^3)^{1/3}\right)$

Άρα η ιδιότητα 1) ισχύει.

2) Μηδενικό διάνυσμα $(0,0)$.

3) Αντίθετο διάνυσμα του (x_1,y_1) είναι το $(-x_1,-y_1)$

4) Ισχύει η $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$. Διότι ισχύει στον καθένα όρο $\oplus$.

$(a+b)\odot(x_1,y_1)\overset{?}{=}a\odot(x_1,y_1)\oplus b\odot(x_1,y_1)$.

$\qquad\|\qquad\qquad\qquad\qquad\|$

$((a+b)x_1,(a+b)y_1)\qquad(ax_1,ay_1)\oplus(bx_1,by_1)=$

$=(((ax_1)^3+(bx_1)^3)^{1/3},((ay_1)^3+(by_1)^3)^{1/3})=$

$=((a^3x_1^3+b^3x_1^3)^{1/3},(a^3y_1^3+b^3y_1^3)^{1/3})=(((a^3+b^3)x_1^3)^{1/3},((a^3+b^3)y_1^3)^{1/3})=$

$=((a^3+b^3)^{1/3}x_1,(a^3+b^3)^{1/3}y_1)\neq(++)$

Άρα η ιδιότητα δεν ισχύει $\Rightarrow$ Το V με αυτές τις πράξεις δεν είναι δ.χ.

$V=\mathbb{R}^2$, $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=((x_1^3+x_2^3)^{1/3},(y_1^3+y_2^3)^{1/3})$

$a\odot(x_1,y_1)=(a^{1/3}x_1,a^{1/3}y_1)$.

Να εξετάσετε την ιδιότητα 6.

$(a+b)\odot(x_1,y_1)=((a+b)^{1/3}x_1,(a+b)^{1/3}y_1)\ \boxed{++}$

$a\odot(x_1,y_1)\oplus b\odot(x_1,y_1)=(a^{1/3}x_1,a^{1/3}y_1)\oplus(b^{1/3}x_1,b^{1/3}y_1)=$

$=((ax_1^3+bx_1^3)^{1/3},(ay_1^3+by_1^3)^{1/3})=((a+b)^{1/3}(x_1^3)^{1/3},(a+b)^{1/3}(y_1^3)^{1/3})=$

$=((a+b)^{1/3}x_1,(a+b)^{1/3}y_1)\ (+)$.

$(+)=(++)$ Άρα ισχύει.

② $W=\{(x,y,z) \mid 3x+5y-5z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, νδο $W \leq \mathbb{R}^3$

$(0,0,0) \in W$.

$(x,y,z),(x',y',z') \in W$

$(x+x', y+y', z+z') \in W \Leftrightarrow 3(x+x')+5(y+y')-5(z+z')=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3x+5y-5z}_{\substack{= \\ 0 \\ (x,y,z)\in W}} + \underbrace{3x'+5y'-5z'}_{\substack{= \\ 0 \\ (x',y',z')\in W}} = 0$$

ισχύει.

$a(x,y,z) \in W$ όταν $(x,y,z) \in W$. $3x+5y-5z=0 \Rightarrow 3ax+5ay-5az=0$ ισχύει.

Βάση για W.

$5z = 3x+5y \Rightarrow z = \frac{3}{5}x + y$

$(x,y,z) \in W \Leftrightarrow (x,y,\frac{3}{5}x+y) \in W \Leftrightarrow (x,0,\frac{3}{5}x)+(0,y,y) \in W$.

$x(1,0,\frac{3}{5})+y(0,1,1) \in W \quad x,y \in \mathbb{R}$

$W = \langle (1,0,\frac{3}{5}),(0,1,1) \rangle \Rightarrow \dim W = 2$.

③ $M(2\times 2, \mathbb{R})$.

a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M(2\times 2, \mathbb{R})$.

Ισχύουν οι δύο ιδιότητες. Άρα $W \leq M(2\times 2, \mathbb{R})$.

Βάση $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Το τυχαίο $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ είναι γραμμ. συνδ. των $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Επειδή $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ και γρ. ανεξ. έχουμε.

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $\dim W = 2$.

b) $W' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix} \mid a, b, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M(2\times 2, \mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & \gamma+\gamma' \end{pmatrix} \in W'$

$c\begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix} \in W' \Rightarrow W' \leq M(2\times 2, \mathbb{R})$

$W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$W'' = \{\text{αντιστρέψιμοι}\} \subseteq M(2\times 2, \mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in W''$ Αλλά $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W''$

d) Z άνω τριγωνικοί $\leq M(2\times 2, \mathbb{R})$.

Scanned with CamScanner

4) $F[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$ με πρόσθεση $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και πολ/σμό

$(af)(x) = a f(x)$

$W = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) \}$. Αν $f, g \in W \Rightarrow f(0) = f(1)$

$g(0) = g(1)$.

$f(0) + g(0) = f(1) + g(1)$

$(f+g)(0) = (f+g)(1)$.

$(af)(0) = a f(0) = a f(1) = (af)(1)$.

$W' = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) + f(1) = \frac{1}{2} \}$.

$f, g \in W' \Rightarrow f(0) + f(1) = \frac{1}{2}$

$g(0) + g(1) = \frac{1}{2}$.

$f(0) + g(0) + f(1) + g(1) = 1! \Rightarrow f+g \notin W$

$W'' = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) + f(1) = f(1/2) \}$.

$W'' \leq F[0,1]$

5) $(4,3,8) = a(4,1,0) + b(2,1,2) + g(2,0,-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 4a + 2b + 2g \\ 3 = a + b \Rightarrow a = 3 - b \\ 8 = 2b - 2g \Rightarrow g = -4 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 = 12 - 4b + \cancel{2b} + 8 - \cancel{2b} \\ 0 = 0b \Rightarrow b \in \mathbb{R}. \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 3 - b \\ g = b - 4 \end{array}}$$

Scanned with CamScanner

7) $A=\{u,v,w\}$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow B=\{u, u+v, u+v+w\}$ γρ. ανεξ.

Δε θα πρέπει το μηδενικό διάνυσμα να γράφεται σαν γρ. συνδυασμός των στοιχείων του B.

$\bar{0} = au + b(u+v) + \gamma(u+v+w)$

$\bar{0} = (a+b+\gamma)u + (b+\gamma)v + \gamma w$

$a+b+\gamma=0$

$b+\gamma=0 \rightarrow b=0 \rightarrow a=0$

$\gamma=0$

Άρα, πράγματι, το B είναι γρ. ανεξ.

V δ.χ. $S=\{v_1,\dots,v_k\} \subseteq V$

$\langle S\rangle = \{a_1v_1+\dots+a_kv_k \mid a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}\}$.

$\langle S\rangle \leq V$ και λέμε ότι είναι υπόχωρος που γεννάται από το S.

$W_1, W_2 \leq V$

$W_1 \cap W_2 \leq V$ Δεν γνωρίζουμε

$W_1 \cup W_2 \leq V$ δε είναι υπόχωρος

Ορισμός: Έστω V δ.χ. και δύο υπόχωροι W_1, W_2. Ορίζουμε το άθροισμα W_1+W_2 να είναι το σύνολο $\{u+v \mid u\in W_1, v\in W_2\}$.

Πρόταση: Έστω V δ.χ. και $W_1, W_2 \leq V$. Τότε $W_1\cap W_2 \leq V$ και $W_1+W_2 \leq V$. Επίσης το άθροισμα W_1+W_2 είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει την ένωση $W_1\cup W_2$.

Απόδειξη: Έστω $u,v \in W_1\cap W_2 \Rightarrow u,v\in W_1$ και $W_2 \Rightarrow u+v, au \in W_1$ και $W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow u+v, au \in W_1\cap W_2 \Rightarrow W_1\cap W_2 \leq V \Rightarrow u, v \in W_1+W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, w_1\in W_1$ και $w_2 \in W_2$ ώστε $u = w_1+w_2$.

$\exists\, w_1' \in W$ και $w_2' \in W_2$ ώστε $v = w_1'+w_2'$

$u+v = w_1+w_2+w_1'+w_2' = (w_1+w_1')+(w_2+w_2') \in W_1+W_2$

$au = \underbrace{aw_1}_{\in W_1} + \underbrace{aw_2}_{\in W_2} \in W_1+W_2$

Έστω $Z \le V$ με $W_1 \cup W_2 \subseteq Z$ και $Z \subseteq W_1+W_2$.

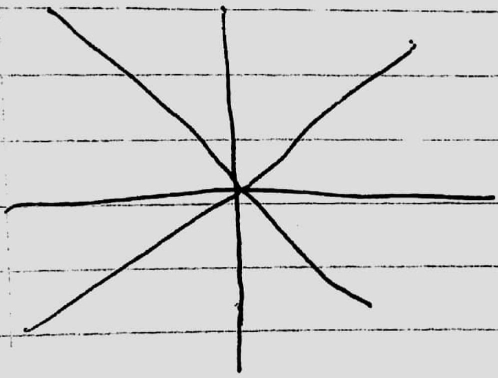
Θα δείξουμε ότι $W_1+W_2 \subseteq Z$.

Έστω $u+v \in W_1+W_2$ τυχαίο με $u \in W_1$ και $v \in W_2$

$u \in W_1 \subseteq Z$ και $v \in W_2 \subseteq Z \Rightarrow u, v \in Z \Rightarrow u+v \in Z \le V \Rightarrow Z = W_1+W_2$.

Π.χ. $W_1 = \{t(1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \le \mathbb{R}^2$

$W_2 = \{t(1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \le \mathbb{R}^2$ $\quad W_1 \cup W_2 \not\le$



$(1,1), (1,-1) \in W_1 \cup W_2$

$(1,1)+(1,-1) = (2,0)$

$(2,0) \notin W_1 \cup W_2$

Διότι $(2,0) \in W_1$

$(2,0) \notin W_2$

Αλλά $(2,0) \in W_1+W_2$.

Ορισμός: Το άθροισμα W_1+W_2 δύο δ. υποχώρων W_1 και W_2 του V, θα καλείται ευθύ, αν $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$.

Γράφουμε $W_1 \oplus W_2$.

Π.χ. $W_1 = \langle (1,1) \rangle$ και $W_2 = \langle (1,-1) \rangle$.

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$ και $W_1 \oplus W_2$

Ο γενικευμένος ορισμός επεκτείνεται για περισσότερους υπόχωρους.
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ κτλ.
Όταν $W_1 \cap W_2 + W_3 + W_4 = \{\bar{0}\}$.
$W_2 \cap W_1 + W_3 + W_4 = \{\bar{0}\}$.
$W_3 \cap W_1 + W_2 + W_4 = \{\bar{0}\}$
$W_4 \cap W_1 + W_2 + W_3 = \{\bar{0}\}$

Πχ. Δίνεται ο υπόχωρος $W_1 = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$.
Να βρεθεί $W_2 \leq \mathbb{R}^3$ ώστε $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ και $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.
Τότε ο W_2 καλείται ευθύ συμπλήρωμα του W_1.
$W_1 = < \quad >$

$(x,y,z) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$.
$W_1 = <(1,0,1),(0,1,1)>$
$W_2 = <(a,b,\gamma)>$ ώστε $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$.
$(a,b,\gamma) \notin W_1 \Rightarrow \{(1,0,1),(0,1,1),(a,b,\gamma)\}$ γρ. ανεξ.

$\dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Άρα $\{(1,0,1),(0,1,1),(a,b,\gamma)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & \gamma \end{pmatrix}$ rank 3

0 0 1

$W_2 = <(0,0,1)>$ ή
$W_2 = <(1,1,3)>$.

Ορισμός: Έστω W_1 και W_2 υπόχωροι του δ.χ. V ώστε $W_1 \oplus W_2 = V$, τότε ο W_2 καλείται ευθύ συμπλήρωμα του W_1 και ο W_1 ευθύ συμπλήρωμα του W_2.

Πρόταση: 1) Έστω W υπόχωρος του V. Τότε μια βάση του W επεκτείνεται σε βάση του V. $\dim V < \infty$

2) Αν W υπόχωρος του V, τότε υπάρχει ευθύ συμπλήρωμα του W: $W \oplus W' = V$. $\dim V < \infty$.

Απόδειξη: 1) Έστω S βάση του W. Βρες $w_1 \in V - W \Rightarrow \{w_1\} \cup S$ είναι γρ. ανεξ.
Έστω $W_1 = \langle \{w_1\} \cup S \rangle$. Αν το $W_1 \neq V \Rightarrow \exists\, w_2 \in V - W_1$
Τότε το $\{w_1, w_2\} \cup S$ είναι γρ. ανεξ.
Ονομάζουμε $W_2 = \langle \{w_1, w_2\} \cup S \rangle$. Αν $W_2 \neq V \Rightarrow \exists\, w_3 \in V - W_2$.
Μετά από πεπερασμένα βήματα, διότι $\dim V < \infty$, θα έχουμε βρει μια βάση του V, η οποία θα προέρχεται από το S.

2) Από το ένα υπάρχει βάση του V, έστω S' η οποία προέρχεται από μια βάση S του W. Ορίζουμε $W' = \langle S' - S \rangle$. Τότε $W \cap W' = \{\bar{0}\}$ και $V = \langle S' \rangle$.
$W = \langle S = \{w_1, \dots, w_k\} \rangle$
$S' = S \cup \{w_{k+1}, \dots, w_n\}$, Άρα $W \oplus W' = V$.

Θεώρημα: Έστω W_1 και W_2 υπόχωροι του δ.χ. V πεπερασμένης διάστασης.

1) Αν $W_1 \leq W_2$, τότε $\dim W_1 \leq \dim W_2$

2) Αν $W_1 \leq W_2$, και $\dim W_1 = \dim W_2$, τότε $W_1 = W_2$.

3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$.

Απόδειξη: 1) Έστω $\{w_1, \dots, w_k\}$ βάση του W_1. Επειδή $W_1 \leq W_2$, αυτή μπορεί να επεκταθεί σε βάση του $W_2 \Rightarrow \dim W_1 = k \leq \dim W_2$.

2) Όπως προηγουμένως, η βάση $\{w_1, \dots, w_k\}$ του W_1 μπορεί να επεκταθεί σε βάση του W_2.
Επειδή $k = \dim W_1 = \dim W_2 \Rightarrow$ Το $\{w_1, \dots, w_k\}$ είναι επίσης βάση του W_2.
Άρα $W_1 = W_2$.

3) $W_1 \cap W_2 \leq W_1 \leq W_1 + W_2$, $\quad W_1 \cap W_2 \leq W_2 \leq W_1 + W_2$

Έστω $\{w_1, \dots, w_k\}$ μια βάση της τομής $W_1 \cap W_2$. Υπάρχουν δύο διαφορετικές επεκτάσεις αυτής της βάσης για να δημιουργήσουμε βάσεις για τον W_1 και W_2.

$W_1 = \langle \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n\} \rangle \Rightarrow \dim W_1 = k + n$.

$W_2 = \langle \{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_l\} \rangle \Rightarrow \dim W_2 = k + l$.

Επίσης, τα $u_i \notin W_1$ και $v_j \notin W_2$, $i = 1, \dots, l$ και $j = 1, \dots, n$.
Αρκεί να δείξουμε ότι το $\{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_l\}$ αποτελεί βάση του $W_1 + W_2$.
Έστω τυχαίο $w + w' \in W_1 + W_2 \Rightarrow w \in W_1$ και $w' \in W_2$

$w = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$.

$w' = a_1' w_1 + \dots + a_k' w_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_l u_l$

Τότε $w + w' = (a_1 + a_1') w_1 + \dots + (a_k + a_k') w_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_l u_l$
Δηλαδή το σύνολο αυτό (+) γεννά το άθροισμα $W_1 + W_2$.
Πρέπει να είναι και γρ. ανεξ. Ας είναι γρ. ανεξ.

$0 = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_l u_l \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_l u_l}_{\in W_2} = \underbrace{-a_1 w_1 - \dots - a_k w_k - b_1 v_1 - \dots - b_n v_n}_{\in W_1}$$

Άρα ισχύουν στην τομή

$\gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_\ell u_\ell = -a_1 w_1 - \ldots - a_k w_k$ και $b_1 = 0 = \ldots = b_n$.

Όμως είναι γρ. ανεξ. (**) είναι βάση του W_2. Άρα $a_1 = \ldots = a_k = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\ell =$
$= b_1 = \ldots = b_n = 0$.

SOS
$$\boxed{\dim(W_1 + W_2) = k + n + \ell = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)}$$
$$k + n \quad + \quad k + \ell \quad - \quad k$$

5/12/2017 V δ.χ. $W_1, W_2 \le V$, $W_1 \cap W_2 \le V$, $W_1 + W_2 \le V$, $W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$.

Συμπλήρωμα του W_1 είναι ένας υπόχωρος W_1', ώστε $W_1 \oplus W_1' = W$

Το συμπλήρωμα δεν είναι μοναδικό

$\{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$.

SOS

(Θέμα εξετάσεων)

$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$

Πχ Δίνονται οι υπόχωροι: $W_1 = \{(x,y,z,w) \mid x+y+z+w=0\}$.

και $W_2 = \{(x,y,z,w) \mid x-y+z-w=0\}$.

Να βρεθεί ένα συμπλήρωμα του W_1.

Να βρεθεί μια βάση της τομής $W_1 \cap W_2$ και ένα συμπλήρωμα της τομής.

$W_1, W_2 \le \mathbb{R}^4$

W_1 $x+y+z+w=0 \Rightarrow w=-x-y-z$ $(x,y,z,w) = (x,y,z,-x-y-z) =$

$= x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$

$W_1 = \langle (1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \rangle$

$\dim W_1 = 3$ $\dim W_1' = 1$.

$\dim W_1 + \dim W_1' = \dim(W_1 + W_1') + \dim W_1 \cap W_1'$ $\oplus$

$W_1 \oplus W_1' \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_1') = 0$

$W_1 \oplus W_1' = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(W_1 + W_1') = 4$

$3 + \dim W_1' = 4 \Rightarrow \dim W_1' = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ένα συμπλήρωμα είναι $W_1' = \langle (0,0,0,1) \rangle$.

α' τρόπος

Να βρούμε $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \mid x+y+z+w=0$ και $x-y+z-w=0\}$

$x+y+z+w=0$

$x-y+z-w=0$

Από τον τύπο $\dim W_1 = 3 = \dim W_2$.
Επειδή $W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ $\Big\} \Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 = 2$.

Γνωρίζουμε ότι $\dim W_1 \cap W_2 = 2$

$x+y+z+w=0$, $x+y+z-w=0$ — $x+y+z+w=0$. $2x + 2z = 0$

$\left.\begin{aligned} x+y+z+w &= 0 \\ x+z &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} x+z&=0 \\ y+w&=0 \end{aligned}$

$z=-x$, $x,y \in \mathbb{R}$

$w=-y$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) = (x,y,-x,-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

Βάση του $W_1 \cap W_2$: $(x,y,-x,-y) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-1)$.

$W_1 \cap W_2 = \langle (1,0,-1,0), (0,1,0,-1) \rangle$

Επιλύσεις: $W_2 = x-y+z-w=0$

Έστω $Z \leq W_1$ με $(W_1 \cap W_2) \oplus Z = W_1$

Από τον τύπο: $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim Z = \dim W_1 + \dim(W_1 \cap W_2 \cap Z)$

$\dim Z = 1$.

Ζητάμε $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in W_1$ και $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \notin W_1 \cap W_2$.

$(x, y, -x, -y) \in W_1 \cap W_2$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ ΝΑΙ

$\alpha = -\gamma$ και $\beta = -\delta$.

$(1, 1, 1, -3)$. $\notin W_1 \cap W_2$

Άρα ένα $Z = \langle (1, 1, 1, -3) \rangle$.

Ένα συμπλήρωμα του $W_1 \cap W_2$ στο $\mathbb{R}^4$.

Ο Z' πρέπει $\dim Z' = 2$, διότι $\underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{2} + \underbrace{\dim Z'}_{2} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ένα Z' είναι $Z' = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Scanned with CamScanner

$W_1 = \langle (1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \rangle$

$\left.\begin{array}{l} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{array}\right)$

$W_2 = \langle (1,0,0,1), (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$.

$W_1 \cap W_2 = ;;;$

$a(1,0,0,-1)+b(0,1,0,-1)+\gamma(0,0,1,-1) = \delta(1,0,0,1)+\varepsilon(1,1,0,0)+\zeta(0,0,1,1)$

$(a, b, \gamma, -a-b-\gamma) = (\delta+\varepsilon, \varepsilon, \zeta, \delta+\zeta)$

$\left.\begin{array}{l} a=\delta+\varepsilon \\ b=\varepsilon \\ \gamma=\zeta \\ -a-b-\gamma=\delta \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=\delta+\varepsilon \\ b=\varepsilon \\ \gamma=\zeta \\ -\delta-\varepsilon-\varepsilon-\zeta=\delta+\zeta \Rightarrow -2\varepsilon=2\delta+2\zeta \Rightarrow \varepsilon=-\delta-\zeta; \quad \delta,\zeta\in\mathbb{R}. \end{array}$

$(\delta+\varepsilon, \varepsilon, \zeta, \delta+\zeta)$ με $\varepsilon=-\delta-\zeta$ περιγράφει την τομή

Ζητάμε $(a,b,\gamma,\delta)\in W_1$ και $(a,b,\gamma,\delta)\in W_1\cap W_2$

$(x, y, -x, -y)\in W_1\cap W_2$

$(\delta+\varepsilon, \varepsilon, \zeta, \delta+\zeta) = (\delta-\delta-\zeta, -\delta-\zeta, \zeta, \delta+\zeta) = (-\zeta, -\delta-\zeta, \zeta, \delta+\zeta) =$

$= \zeta(-1,-1,1,1)+\delta(0,-1,0,1)$

Άρα $W_1\cap W_2 = \langle (-1,-1,1,1), (0,-1,0,1) \rangle$.

Πράγματι $(-1,-1,1,1)$ και $(0,-1,0,1)$ να ικανοποιούν τη συνθήκη που βρήκαμε προηγουμένως: $(x, y, -x, -y)$ ✓

$x=-1, y=-1$ $(-1,-1,1,1)$ ✓

$x=0, y=-1$ $(0,-1,0,1)$ ✓

$\{a, b\} \neq (a, b)$

$\| \qquad\qquad \nparallel$

$\{b, a\} \qquad (b, a).$

$V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$S = \{v_1, \dots, v_k\}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά. Άρα δεν έχουν προσανατολισμό.